SLOVENSKÁ POĽNOHOSPODÁRSKA UNIVERZITA
V NITRE
FAKULTA EKONOMIKY A MANAŽMENTU

Evidenčné číslo:

TVORBA A VYUŽITIE JEDNODUCHÝCH MATEMATICKÝCH MODELOV V EKONOMICKEJ PRAXI

V Nitre 2010 **ĽUBOMÍR MICHALIČKA**

SLOVENSKÁ POĽNOHOSPODÁRSKA UNIVERZITA

V NITRE

FAKULTA EKONOMIKY A MANAŽMENTU

TVORBA A VYUŽITIE JEDNODUCHÝCH MATEMATICKÝCH MODELOV V EKONOMICKEJ PRAXI

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program:	Ekonomika a manažment agrosektoru
Školiace pracovisko:	Katedra matematiky
Školiteľ:	Mgr. Norbert Kecskés

V Nitre 2010 **Ľubomír Michalička**

Abstract

Mathematical modelling of economics praxis succeeded expansion economics thinking from his youth. She gains miscellaneous molds from elemental till relatively complicated. There are some existed areas,that are of his problematic mathematical definition further and the other that are directly develope.

Indivividual chapter were processed so, in order to readers make the acquaintance of basically principles of modeling making and gained needs knowledge about individual ecomomical-mathematical models, especially about their construction and utilizable opportunities. In the theoretical part are described groundworks of economical-mathematical modelling and his mainly notion, that are necessary to comprehension given themes.

When you will read this thesis, you should get basic knowledge and skills how to compare different institution products and choose more profitable one.

Key words: mathematical modeling, economic praxis, mathematical model, institution products,

Kľúčové slová: matematické modelovanie , ekonomická prax, matematický model, bankové produkty

Čestné vyhlásenie

Čestne vyhlasujem, že som bakalársku prácu vypracoval samostatne s použitím uvedenej literatúry.

V Nitre 15. Mája 2010

Podpis autora BP

Poďakovanie

Touto cestou vyslovujem poďakovanie pánovi Mgr. Norbertovi Kecskésovi za pomoc, odborné vedenie a pripomienky pri vypracovaní mojej bakalárskej práce.

Taktiež sa chcem poďakovať mojej rodine, ktorá pre mňa vytvorila ideálne podmienky potrebné k úspešnému napísaniu tejto práce.

V Nitre 15.mája 2010 ----------------------

podpis autora BP

Zoznam skratiek a značiek

resp.	respektívne
p.j.	peňažná jednotka
k	úrok
P	výsledná suma úročenia
t	čas
e	Eulerovo číslo
tzn	to znamená
t.j.	to jest
p.a.	per annum

Obsah

Obsah ... 7

Úvod ... 9

1 Prehľad o súčasnom stave problematiky ... 10

1.1 Základy teórie ekonomicko-matematického modelovania ... 10

1.1.1 Podstata a význam matematického zobrazenia v ekonomickej praxi ... 10

1.1.2 Klasifikácia modelov a ich charakteristika ... 11

1.1.3 Podmienky úspešného modelovania ... 13

1.1.4 Etapy modelovej tvorby ... 13

Analýza východiskovej situácie a formulácia problému ... 14

Konštrukcia modelu a jeho kvantifikácia ... 14

Riešenie problému - komputácia ... 15

Interpretácia a analýza vypočítaných výsledkov ... 15

Implementácia ... 15

2 Základné pojmy ... 16

2.1 Banka ... 16

2.2 Úrok ... 17

2.3 Úroková miera(sadzba) ... 17

2.4 Úrokovanie, typy úrokovaní ... 17

2.4.1 Spojité úrokovanie ... 18

2.4.1 Druhy diferenciálnych rovníc ... 19

3 Cieľ ... 21

4 Metodika práce ... 22

5 Tvorba modelov a ich využitie ... 23

Model č.1 ... 23

Model č.2 ... 25

Model č.3 ... 25

Model č.4 ... 26

Model č.5 ... 27

6 Záver ... 30

7 Použitá literatúra ... 31

Úvod

Matematické modelovanie ekonomickej praxi sprevádza rozvoj ekonomického myslenia od jeho počiatkov. Nadobúda rôzne formy od elementárnych až po relatívne zložité. Existujú oblasti, ktoré sú svojou problematikou matematickej formulácií vzdialené, a iné, ktoré ju priamo vyvolávajú.

Výklad práce je zameraný na prechod od vymedzených predpokladov k formulácii modelov a od formulácie modelu pomocou matematických prostriedkov k opisu jeho fungovaniu a použiteľnosti v praxi. Ďalej treba vedieť, že pracujeme s modelom reality, teda s jeho zmenšeninou či grafickým zobrazením, ktoré sleduje hlavné znaky skúmaných otázok. Matematický postup používame pre opis či rozbor modelu.

Dôležitou úlohou pri riešení rôznych problémov v ekonómií je určenie neznámej funkcie na základe jej vlastností. V matematickej analýze sú tieto vlastnosti obvykle vyjadrené pomocou derivácií alebo diferenciálov. Ak takéto vlastnosti popisujú vzťahy medzi deriváciami funkcie a funkciou, nazývame ich diferenciálnymi rovnicami. Diferenciálne rovnice môžu popisovať vlastnosti funkcií jednej i viac premenných. My sa budeme ďalej zaoberať len reálnou funkciou jednej reálnej premennej. Diferenciálne rovnice majú mnohostranné využitie. V praktickej časti práce uvedieme niekoľko aplikácií diferenciálnych rovníc v ekonómií.

Jednotlivé kapitoly sú volené tak, aby bolo možné sa oboznámiť so základnými princípmi modelovej tvorby a potom získať potrebné poznatky o jednotlivých ekonomicko-matematických modeloch, najmä o ich konštrukcií a aplikačných možnostiach. V teoretickej časti sú popísané základy ekonomicko-matematického modelovania a hlavné pojmy, ktoré sú nevyhnutné k pochopeniu danej témy. V praktickej časti sa venujeme samotnej tvorbe modelov.

Po preštudovaní tejto práce by mal každý získať základné vedomosti a zručnosti týkajúce sa spôsobu zhodnocovania svojich finančných prostriedkov a mal by byť schopný na základe získaných vedomostí porovnať výhodnosť rôznych bankových produktov.

1 Prehľad o súčasnom stave problematiky

1.1 Základy teórie ekonomicko-matematického modelovania

1.1.1 Podstata a význam matematického zobrazenia v ekonomickej praxi

Ekonomicko-matematické modelovanie je modelovanie ekonomických javov a procesov, ktoré sa používa pri riešení rôznych úloh súvisiacich s riadením ekonomických systémov či už na mikroekonomickej alebo makroekonomickej úrovni. Modelovanie je najcharakteristickejším rysom moderného prístupu k riešeniu zložitých ekonomických problémov. Je základným nástrojom operačnej analýzy, ekonometrie ,vedy o riadení, ekonomickej kybernetiky ,systémového inžinierstva a ďalších vedných disciplín ,ktoré sú charakterizované snahou o kvantitatívne zobrazenie riešených úloh súvisiacich s riadením ekonomických systémov.

S princípmi modelovania sa stretávame veľmi často ,a to tak v bežnom živote ako i vo vede a technike, kde modelovanie nadobudlo najmä v poslednom období veľký význam. Mnohé významné úspechy v tejto oblasti sa totiž dosiahli vďaka modelovej tvorbe.

Výraz model je odvodený z latinského výrazu „modulus" , ktorým sa v stredoveku udávala v staviteľstve miera(polomer) pre vyjadrenie jednotlivých proporcií stavby ako i neskoršie vzniknutého talianskeho výrazu „modello" používaného vo výtvarnom umení vo význame: vzor, predobraz, podľa ktorého sa niečo robí. Vo všeobecnosti treba model chápať ako zjednodušený obraz skutočnosti zobrazujúci iba tie jej stránky, ktoré sú z hľadiska skúmanej problematiky významné a podstatné. Matematický model je abstraktný model používajúci matematický zápis na opísanie správania sa sústavy(systému).

Predmetom modelového zobrazenia je vždy určitá objektívna realita. V modelovej tvorbe, ktorá má slúžiť k riešeniu ekonomických problémov, sa modelové zobrazenie týka ekonomickej, resp. finančno-ekonomickej reality. Táto realita je vo svojej totalite veľmi zložitá a mnohotvárna. Pozostáva zo súboru prvkov navzájom pospájaných rozmanitými a často zložitými vzťahmi a ako celok plní vždy určitú požadovanú funkciu. Vzhľadom na

uvedené vlastnosti môžeme na skúmanú ekonomickú realitu pozerať ako na objekt pre zavedenie (definovanie) určitého ekonomického, resp. finančno-ekonomického systému. Pretože základným objektom, na ktorom v tejto práci demonštrujeme aplikačné možnosti metód operačnej analýzy je banka, ktorá tu vystupuje ako podnikateľsky subjekt, budeme systémy definovať práve na tejto finančno-ekonomickej realite.

Dôvody, pre ktoré možno v zmysle systémovej vedy definovať na banke určitý ekonomický systém, sú dané tým, že :

- je vedome vytvorený človekom za tým účelom, aby podľa zvolených kritérií plnil určitú spoločenskú úlohu(ponúka služby za účelom zisku)
- ide o ekonomickú realitu, ktorej správanie je koordinovateľné, pravidelné a cieľové
- je schopný reagovať na opakujúce sa situácie a prispôsobovať sa zmeneným podmienkam

Ekonomický systém definovaný na banku bude mať dynamický charakter. Nemôžeme ho analyzovať a priamo rozpoznať vlastnými zmyslami, preto sa snažíme jednotlivé javy a procesy, ktoré sa v nich odohrávajú, určitým spôsobom zobraziť, znázorniť, namodelovať. Výsledkom tohto zobrazenia je model.

1.1.2 Klasifikácia modelov a ich charakteristika

Modely, ktorými možno ekonomickú realitu zobraziť, môžu byť veľmi rozmanité, a to tak po obsahovej ako i účelovej a formálnej stránke. Možno klasifikovať z rozličných hľadísk. Na prvom mieste treba uviesť triedenie modelov podľa výrazových prostriedkov, ktoré sa v modelovej tvorbe používajú a podľa účelu, ktorému má matematické zobrazenie slúžiť. Uvedením triedením nemožno zobraziť kvantitatívne vzťahy a závislosť určitého ekonomického ukazovateľa od jednotlivých finančných faktorov. Preto k zobrazeniu ekonomickej reality používame verbálny popis a matematické zobrazenie. Výsledkom tohto zobrazenia poznáme dva druhy modelov, a to

- verbálne modely
- matematické modely

Pri **verbálnych modeloch** slúži k modelovému zobrazeniu verbálny popis. Pri popise sa snažíme jednotlivé ekonomické javy a procesy vyjadriť slovne, za pomoci všeobecných a odborných výrazov a gramatických väzieb. Možno povedať, že popisný spôsob zobrazenia v ekonómií prevláda.

Matematické modelovanie používa k zobrazeniu ekonomickej reality matematický aparát: sústavu rovníc, nerovníc, funkcií, a pod.. Matematický model vo všeobecnom ponímaní nemusí mať povahu mechanického zariadenia, ale môže byť oveľa univerzálnejší a všeobecnejší. Môže ním byť akákoľvek všeobecná myšlienková konštrukcia. V porovnaní s verbálnym popisom sa vyznačuje vyšším stupňom objektívnosti a umožňuje exaktný prístup k riešeniu problémov, s ktorými sa pri bankovom sektore stretávame.

Zobrazenie ekonomickej reality pomocou matematického modelu, podobne ako každé iné modelové zobrazenie akejkoľvek reality, je iba aproximáciou tejto reality. Pri zobrazovaní matematickým modelom sa dopúšťame určitého zjednodušenia- určitej simplifikácie. Toto zjednodušenie je nutné, pretože ekonomická realita je mnohotvárna a preto nie je možné všetky jej stránky(vlastnosti) naraz zachytiť a matematicky zobraziť.

Z uvedených poznatkov môžeme ekonomicko-matematický model definovať ako zjednodušené zobrazenie ekonomickej reality pomocou matematického aparátu(sústavy diferenciálnych rovníc). Pri modelovom zobrazení dochádza k analógií dvoch systémov. Prvým z nich je reálny systém, ktorý je predmetom zobrazenia. Druhým systémom je matematický model zobrazujúci reálny systém. Možno ho nazvať obrazom.

Z hľadiska predpokladaných vzťahov medzi jednotlivými veličinami možno rozlišovať:

- **modely deterministické**: pri konštrukcií takýchto modelov sú skúmané javy jednoznačne určené, každej veličine zodpovedá iba jedna veličina a konštanty sú známe.
- **modely stochastické**: u týchto modelov nemajú veličiny požadovanú stabilitu. Nie sú to známe konštanty, ale sa menia s určitou pravdepodobnosťou, majú teda náhodný charakter.

Triedenie modelov z hľadiska času:

- **modely statické**: sú také modely, ktoré sa v časovom horizonte nemenia
- **modely dynamické**: pri dynamických modeloch sa predpokladá závislosť skúmaných veličín na čase. Faktor času je pri modelovom zobrazení dôležitý z toho dôvodu, že finančno-ekonomické systémy v danom časovom horizonte menia svoju štruktúru i správanie sa.

Podľa použitia rozdielnych techník možného modelového zobrazenia delíme modely na:

- **analyticko-matematické**: prichádzajú do úvahy vtedy, keď sme schopní všetky dôležité vzťahy daného systému popísať matematickými výrazovými prostriedkami.
- **simulačné modely**: sú založené na simulačnej technike .Úlohou simulácie je popísať štruktúru skúmaného systému a realizovať ju zodpovedajúcim spôsobom na počítači(pomocou špeciálneho programu) tak, aby bolo možné s týmto zobrazením experimentovať miesto experimentovania s originálom. Simuláciu treba chápať ako napodobnenie vývoja pomocou programu na počítači. Zobrazenie štruktúry reálneho systému sa označuje ako simulátor, ktorý slúži k experimentovaniu. Pomocou simulátora získavame informácie, ako sa simulačne zobrazený systém správa v rozličných zmenených podmienkach vyjadrených rozličnými diferencovanými vstupmi.

1.1.3 Podmienky úspešného modelovania

Úspešné riešenie ekonomických problémov pomocou modelového prístupu vyžaduje splnenie určitých subjektívnych a objektívnych predpokladov.

K predpokladom subjektívnej povahy patrí:

- znalosť progresívnych metód a prostriedkov ekonomickej analýzy
- znalosť vecnej problematiky, ktorá je predmetom skúmania a schopnosť túto problematiku adekvátne pomocou techniky matematického modelovania zobraziť.

Objektívne predpoklady sú dané faktormi:

- špecifickosť hospodársko-ekonomickej sústavy
- informačný systém schopný poskytnúť vhodné informácie potrebné k modelovaniu
- disponovanie prostriedkami výpočtovej techniky

1.1.4 Etapy modelovej tvorby

Každé matematické modelovanie prebieha v niekoľkých na seba nadväzujúcich fázach, ktorých časový a obsahový sled je pevne stanovený a má logickú myšlienkovú štruktúru. Ide o nasledovné etapy:

Analýza východiskovej situácie a formulácia problému

Pred vlastnou formuláciou problému je účelné a žiadúce analyzovať východiskovú situáciu. Zmyslom tejto analýzy je najmä rozbor nedostatkov a potiaží, ktoré sa na skúmanom úseku vyskytujú, kádrovej situácie a ostatných subjektívnych a objektívnych predpokladov. Záverom analýzy východiskovej situácie má byť rozhodnutie, či vzhľadom k zisteným skutočnostiam je alebo nie je účelné pristúpiť k riešeniu skúmaného problému.

Po vykonanej analýze východiskovej situácie možno pristúpiť k vlastnej formulácií problému alebo úlohy. Riešiaci subjekt (konceptor) v tejto fáze objasňuje, vymedzuje a formuluje problém s osobitným zreteľom na stanovené kritérium, vyjadrujúce ciel, ktorý sa riešením úlohy sleduje. Modelové zobrazenie súvisí vždy s riešením určitého konkrétneho ekonomického problému. Je žiadúce na skúmanej finančno-ekonomickej realite identifikovať rozhodujúce prvky a väzby medzi nimi. Formulácií problému treba venovať náležitú pozornosť, pretože dobre vymedzený a správne formulovaný problém už možno považovať z polovice za vyriešený.

Konštrukcia modelu a jeho kvantifikácia

Po uskutočnení analýzy východiskového stavu a formulácií problému, ktorý sa má riešiť, možno pristúpiť k vlastnej konštrukcií modelovej tvorby.

Vypracovanie modelu vyžaduje v prvom rade definitívne vymedziť premenné, ktoré musia byť v modely obsiahnuté. Výber premenných a stanovenie ich počtu ovplyvňuje veľkosť a ovládateľnosť modelu. Vymedzením obmedzujúcich podmienok rozhodujeme o veľkosti , voľnosti a o počte premenných, ktoré vstúpia do riešenia. Pri ich výbere a formulácií musíme mať na pamäti účel(cieľ), ktorý sledujeme. Výber a tvorba modelu je poznačená značným subjektivizmom..Z toho vyplýva, že modelové zobrazenie daného systému je odrazom osobných kvalít konceptora (jeho odbornej erudovanosti, praktických skúseností, logického úsudku, odborného citu, intuície). Matematický model sa stane zobrazením konkrétneho finančno-ekonomického systému až vtedy, keď sa naplní konkrétnymi číselnými údajmi. Nemalo by nám byť ľahostajné akými údajmi model naplníme, pretože kvalita výsledkov riešenia je závislá od kvality vstupných údajov.

Na zobrazenia ekonomickej reality používame často niekoľko matematických modelov, pričom každý z nich je tvorený na predpokladov, hypotéz a teórií. Takémuto postupu hovoríme <u>multimodelovanie</u>. Uskutočnením analýzy výsledkov zodpovedajúcich jednotlivým modelom a ich vzájomným porovnávaním získame informácie, ktoré z týchto zobrazení je najlepšie, resp. najvhodnejšie.

Riešenie problému - komputácia

Do tejto etapy zahŕňame procesy s uskutočnením vlastného výpočtu. Pomocou výpočtovej techniky sme túto etapu modelovej tvorby plne automatizovali. Pretože komputácia problému by sa pre niekoho mohla zdať ako španielska dedina, počítače nám tieto abstraktné údaje zhmotnia do grafov, tabuliek, schém a pod..

Interpretácia a analýza vypočítaných výsledkov

Interpretáciou sa zisťuje, ako nadobudnuté výsledky zodpovedajú východiskovým hypotézam, teóriám, ako sú blízke skutočnosti. To znamená do akej miery sú získané výsledky narušené logickými nedostatkami matematického modelu.

Zmyslom interpretačnej analýzy nie je iba skúmanie kvality vypočítaných výsledkov a ich úprava pre praktickú realizáciu, ale aj poznávanie vlastností modelového zobrazenia, poznávanie jeho kladov i nedostatkov, jeho správanie sa v rozličných zmenených podmienkach.

Implementácia

Je praktická realizácia získaného riešenia. Realizácia výsledkov je zavŕšením modelovej tvorby a je vždy spojená s určitým rizikom, lebo sa na ňu viažu dôsledky konkrétneho rozhodnutia. Pri implementácií ide o vyjadrenie sa k jednotlivým možným stratégiám a k pravdepodobným dôsledkom, ktoré sú s realizáciou týchto stratégií späté.

2 Základné pojmy

Doteraz sme sa venovali prístupu k tvorbe ekonomicko-matematických modelov, ale na to aby sme mohli prejsť k samotnému cieľu práce, resp. modelovaniu, mali by sme si povedať najskôr niečo o reálnom systéme, na ktorom budeme modelovanie demonštrovať. Našim vzorovým systémom je finančno-ekonomický systém.

Finančno-ekonomický systém pozostáva z domácností, firiem, štátu a zahraničia. Stretávajú sa na trhoch tovarov a služieb, trhoch výrobných faktorov a finančných trhoch (finančný trh ako súčasť ekonomického systému).Systém vzťahov, inštitúcií a nástrojov, pomocou, ktorých dochádza k sústredeniu, alokácii a prerozdeľovaniu dočasne voľných finančných zdrojov jednotlivých subjektov, na báze pôsobenia ponuky a dopytu. Pôsobenie ponuky a dopytu vplýva na cenu zdrojov, ktorá je vyjadrená kurzom finančného nástroja(úrokom), ktorý ovplyvňuje úroková miera. Voľné finančné zdroje sa umiestňujú na finančný trh, aby sa zhodnotili -maximalizovali. Keď sme vlastníkmi, chceme dosiahnuť maximálny výnos, ak sme dlžníci, chceme to dosiahnuť pri minimálnych nákladoch. Tieto protichodné tendencie optimalizujú činnosť finančného trhu. Na finančnom trhu vystupujú rôzne inštitúcie, napr. poisťovne, stavebné sporiteľne, DSS, leasingové spoločnosti, ale pre nás sú z finančno-ekonomického hľadiska najpodstatnejšie banky.

2.1 Banka

Banka je špecifický podnikateľský subjekt, zameraný na dosahovanie zisku pri zohľadnení primeraného rizika podnikania v oblasti bankovníctva.

Základnými funkciami komerčnej banky sú:

- prijímanie vkladov,
- poskytovanie úverov,
- realizácia platobného styku,
- poskytovanie ďalších finančných a poradenských služieb,
- ovplyvňovanie emisie úverových peňazí a pod.

Banka sa obyčajne charakterizuje ako **finančný sprostredkovateľ** presunu dočasne voľných prostriedkov v ekonomike. Prijíma vklady od tých, ktorí sporia a za toto odkladanie voľného kapitálu im banka pripisuje úrok k aktuálnej výške peňazí na účte.. Vkladateľom na požiadanie vypláca peniaze naspäť alebo ich prevádza na iné účty.

2.2 Úrok

Podľa Cipru T. 1995 [1] „je nutné úrok posudzovať z 2 hľadísk:“

- z hľadiska veriteľa (vkladateľa ,investora) je úrok odmena za dočasné poskytnutie peňazí niekomu inému .Jedná sa predovšetkým o odmenu za dočasnú stratu dispozičného práva s peniazmi ,za pokles ich hodnoty v priebehu pôžičky vzhľadom na infláciu ,za podstúpenie určitých rizík spojených s tým ,že peniaze pustíme na určitú dobu z ruky .Pre majiteľa peňazí je rozhodne uspokojivejšie vidieť rásť svoje peniaze vhodným úrokovaním ,než nechať ich strácať reálnu hodnotu schovávaním niekde pod papučou .
- z hľadiska dlžníka je úrok cena za získanie úveru. Aj keď dlžník musí za právo nakladať s peniazmi platiť nemalé čiastky ,predstavuje preňho získanie úveru väčšinou prínos .Získa ihneď potrebné peniaze ,ktoré potrebuje ,alebo môže zbohatnúť z podnikateľskej činnosti, ktorú môže financovať vďaka požičanému kapitálu.

2.3 Úroková miera(sadzba)

Radová J. , Dvořák P. 2003 definujú „úrokovú mieru ako úrok vyjadrený v percentách z hodnoty kapitálu za časové obdobie.“

Vo finančno-ekonomickej praxi a teórií diferencujeme tri základné úrokové miery:

- nominálna úroková miera
- zvažovaná úroková miera
- vnútorné výnosové percento

Tým, že vložíme finančné prostriedky do banky na určité časové obdobie, sa nám nepotrebný kapitál zúročuje o aktuálnu úrokovú sadzbu. Frekvencia úročenia je daná po dohode s bankou a to: ročne(p.a.), polročne(p.s.), štvrťročne(p.q.),mesačne(p.m.), denne(p.d.).

2.4 Úrokovanie, typy úrokovaní

Podľa Radovej J. , Dvořáka P. 2003 [10] „existujú dva základné spôsoby úrokovania:“

- jednoduchom úrokovaní hovoríme vtedy, ak sa vyplácané úroky k pôvodnému kapitálu nepripočítavajú a ďalej neúrokujú. Inými slovami, úroky sa počítajú stále z pôvodného kapitálu;
- zložené úrokovanie sa jedná, ak sa úroky pripisujú k peňažnej čiastke a spolu s ňou sa ďalej úrokujú

Úrokovanie delíme tiež podľa toho, kedy dochádza k plateniu úrokov. Z tohto hľadiska hovoríme o:

- úrokovaní polehotnom alebo dekurzívnom v prípade, že sa úroky platia na konci úrokového obdobia
- úrokovaní predlehotnom alebo anticipatívnom, ak dochádza k plateniu úrokov na začiatku úrokovacieho obdobia

2.4.1 Spojité úrokovanie

Cipra T. 1995 [1] pri zavedení spojitého úrokovania vychádza z predpokladu, že početnosť úrokovania v priebehu roka rastie nad všetky medze (pri matematickom vyjadrení použijeme symbol limitného prechodu m $\rightarrow\infty$), t. j. dĺžka úrokovacieho obdobia sa blíži k nule. Zavedenie tohto pojmu má okrem iného nasledujúce dva dôvody:

Pretože efektívna úroková miera s rastúcou frekvenciou úrokovania rastie, úrokuje vklad pri rovnakej nominálnej hodnote najviac tá banka, ktorá pripisuje úroky "spojito". To sa dá využiť v reklame zamlčujúc tú skutočnosť, že medzi denným a spojitým úrokovaním je zanedbateľný rozdiel, viď tabuľka č. 1

Druhý dôvod spojitého úrokovania má matematický základ, pretože prechod od diskrétnych hodnôt k infinitezimálnym (t.j. nekonečne malým) hodnotám umožňuje používať kvantitatívne nástroje matematického kalkulu, ako je derivácia a integrál a sústava diferenciálnych rovníc.

2.4 Diferenciálne rovnice

Diferenciálnu rovnicu je možné vo všeobecnosti definovať ako matematickú rovnicu, ktorá obsahuje aspoň jednu deriváciu hľadanej funkcie. Tieto rovnice tvoria základ rôznych výpočtov a modelov, a sú používané vo väčšine oblastí ľudského poznania.

Diferenciálnou rovnicou *n*-tého rádu nazývame každú rovnicu, ktorú je možné zapísať v tvare $F\left(x, y, y' \ldots y^{(n)}\right) = 0$, kde F je funkcia $n+2$ premenných a y označuje neznámu funkciu. Rád diferenciálnej rovnice je určený rádom najvyššej derivácie, ktorá je v rovnici prítomná. Podľa toho rozdeľujeme diferenciálne rovnice na rovnice prvého, druhého, resp. *n*-tého rádu. V prípade, že funkcia F je lineárnou funkciou hľadanej funkcie, diferenciálnu rovnicu nazývame lineárnou.

2.4.1 Druhy diferenciálnych rovníc

Základné rozdelenie diferenciálnych rovníc je podľa typu obsiahnutých derivácii:

- obyčajné diferenciálne rovnice (skr. ODR alebo ODE) — rovnice obsahujúce derivácie len podľa jednej premennej
- parciálne diferenciálne rovnice (skr. PDR alebo PDE) — obsahujú derivácie podľa viacerých premenných
- stochastické diferenciálne rovnice (skr. SDR alebo SDE) — rovnice zahŕňajúce najmenej jeden stochastický proces
- diferenciálne algebrické rovnice (skr. DAE) — diferenciálne rovnice, v ktorých sa nachádzajú aj čisto algebrické vedľajšie podmienky

Matematická teória diferenciálnych rovníc sa zaoberá existenciou riešení, jednoznačnosťou riešení, závislosťou riešení na počiatočných a okrajových podmienkach.

V ekonomike a ďalších aplikáciách je zaujímavé najmä získanie analytického riešenia, teda explicitne vyjadrenej funkcie, ktorá rovnicu rieši. Ak takú funkcie nejde analyticky vyjadriť, potom je nutné numerické riešenie diferenciálnych rovníc.

Základným matematickým nástrojom nášho modelu je lineárna diferenciálne rovnica prvého rádu. Jej všeobecný tvar je

$$y' + p(x)y = q(x),$$

kde $p(x), q(x)$ sú spojité funkcie argumentu x. Túto rovnicu je možné riešiť viacerými spôsobmi, napr. Lagrangeovou metódou variácie konštanty alebo Bernoulliho metódou. Špeciálnym prípadom tejto rovnice je rovnica tvaru

$$y' = ky,$$

kde k je konštanta, pre ktorú platí $k > 0$. Túto rovnicu je možné jednoducho riešiť metódou separácie premenných. Platí

$$y' = k\ y$$

$$\frac{dy}{dx} = k\ y,$$

kde deriváciu funkcie y sme označili pomocou diferenciálov ako $\frac{dy}{dx}$. Ďalej

$$\frac{dy}{y} = k\ dx.$$

Táto rovnica je v separovanom tvare a môžeme ju integrovať.

$$\int \frac{dy}{y} = \int k\, dx ,$$

dostávame

$$\ln|y| = k\ x + c ,$$

kde c je integračná konštanta, ktorú určíme z tzv. počiatočnej podmienky $y(x_0) = y_0$. Ďalej vyjadríme funkciu y

$$y = e^{k\,x+c}$$

$$y = e^{k\,x}.e^{c} .$$

Výraz e^c nahradíme novou konštantou C, čiže $C = e^c$, čiže

$$y = C\ e^{k\,x} .$$

Táto funkcia predstavuje všeobecné riešenie rovnice $y' = k\ y$. Pri modelovaní sa využíva tzv. partikulárne riešenie diferenciálnej rovnice, ktoré dostaneme tak, že do všeobecného riešenia zavedieme počiatočnú podmienku. Týmto spôsobom určíme integračnú konštantu.

3 Cieľ

Cieľom práce je priblížiť tvorbu jednoduchých matematických modelov a navrhnúť spôsob využitia v ekonomickej praxi. Matematické modely budú simulovať správanie sa reálneho systému, čiže ekonomickej reality, ako reaguje na rozličné zmenené podmienky vyjadrených rozličnými diferencovanými vstupmi. Modelovanie takejto ekonomickej reality bude mať výlučne dynamicko-deterministický charakter, pretože skúmané javy sú jednoznačne určené, každej veličine zodpovedá jedna konštanta a v danom časovom horizonte budú meniť svoju štruktúru i správanie sa.

4 Metodika práce

Bakalárska práca je zameraná na problematiku využitia finančno-matematických modelov v ekonomickej praxi. Na dosiahnutie stanoveného cieľa je pri vypracovaní bakalárskej práce stanovený nasledovný postup:

- Vytýčenie hlavného cieľa práce a čiastkových cieľov
- Preštudovanie dostupných zdrojov domácej i zahraničnej literatúry k danej téme
- Vypracovanie súčasného stavu riešenej problematiky
- Analýza, porovnávanie a spracovanie získaných údajov
- Syntéza dosiahnutých poznatkov a výsledkov práce
- Odporúčanie na ich praktické využitie

Bakalárska práca pozostáva z teoreticko-analytickej časti a praktickej časti

1.prehľad o súčasnom stave riešenej problematiky

2.tvorba a využitie modelov

Podkladové údaje potrebné na spracovanie prehľadu o súčasnom stave riešenej problematiky sme získali z publikácií domácich i zahraničných autorov, ktorý sa venovali problematike ekonomicko-matematickému modelovaniu v praxi a bankovníctve. Taktiež sme využili informácie získané z vedeckých časopisov, internetových stránok. Pokračujeme od všeobecnej teórie ku konkrétnemu matematickému modelovaniu v ekonomickej praxi. Vychádzame z charakteristiky ekonomicko-matematického modelovania a postupne prechádzame k jednotlivým pojmom, logickým súvislostiam a vzťahom.

5 Tvorba modelov a ich využitie

V tejto časti sa zaoberáme riešením rôznych situácií, ktoré sa veľmi často vyskytujú v ekonomickej praxi. Výsledkom týchto situácií sú jednoduché matematické modely. Z dôvodu ľahšej predstavivosti sme vybrali také, ktoré sa nachádzajú v bežnom živote a každý človek sa s niečím podobným musel už nejedenkrát stretnúť.

Pomocou jednoduchého matematického modelu bližšie popísaného v teórií v kapitole 1, môžeme spojité úročenie popísať exponenciálnou funkciou:

$$f : P = P_0.e^k.t$$

Kde: P_0 - počiatočný stav

k - úrok (vyjadrený v percentách)

t – počet dní od vkladu

P – výsledná suma úročenia za t dní

V našich modeloch vystupuje akýsi pán XY ,ktorého sme pomenovali pán Novák. Pánovi Novákovi sa zvýšil životný štandard a rozhodol sa nejaké peniaze vložiť do banky. Rieši rôzne problémy ekonomickej praxe, s ktorou sa stretávame každý deň. Každá banka ako súčasť tejto teórie, ponúka rôzne úroky pri rôznych frekvenciách úročenia. My na pánovi Novákovi dokazujeme, ako je možné využiť jednoduché matematické modely v ekonomickej praxi.

Model č.1

Pán Novák našiel banku ABC , ktorá poskytuje vedenie účtu bez poplatkov so spojitým úročením s úrokovou sadzbou $k = 3,2\%$ p.a. .Pán Novák má k dispozícií P_0 peňažných jednotiek, ktoré 1. januára vložil na takýto účet. Za aký čas bude mať pán Novák $1,3\,P_0$ p.j.?

$t = ?$

$P = 1{,}3.P_0$

$k = 3{,}2\% = 0{,}032$

- dosadíme vstupné údaje do rovnice

$$\mathrm{P} = \mathrm{P}_0.\mathrm{e}^{\mathrm{k.t}}$$

$$1{,}3.\mathrm{P}_0 = \mathrm{P}_0.\mathrm{e}^{0{,}032.\mathrm{t}}$$

$$1{,}3 = \mathrm{e}^{0{,}032.\mathrm{t}}$$

$$\ln 1{,}3 = \ln .\mathrm{e}^{0{,}032.\mathrm{t}}$$

$$\ln 1{,}3 = 0{,}032.\mathrm{t}.\ln .\mathrm{e}$$

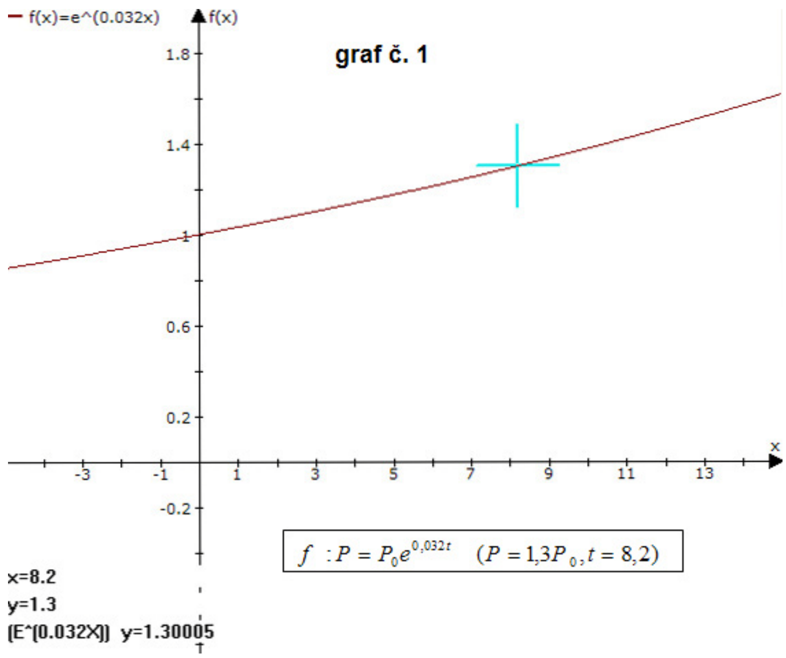
$$\ln 1{,}3 = 0{,}032.\mathrm{t}$$

$$\mathrm{t} = \frac{\ln 1{,}3}{0{,}032}$$

$$\mathrm{t} = 8{,}199 = 8{,}2\mathrm{roka}$$

Využitie:

Keby pán Novák vložíl 1.januára na účet 1000 p.j.,o 8,2 roka by mal zisk 300 p.j. pri úrokovej sadzbe 3,2 p.a.



Model č.2

Pán Novák navštívi svoju banku ABC 7.februára a chce vedieť aktuálny stav na svojom účte.

$k = 0{,}032$

$P = ?$

počet dní 38

$t = \frac{38}{365}$

$P = P_0.e^{k.t}$

$P = P_0.e^{0{,}032.\frac{38}{365}}$

$P = P_0.e^{\frac{152}{45625}}$

$P = P_0.e^{0{,}033315}$

$P = P_0.1{,}003337$

$P = 1{,}003337.P_0 = 1{,}003.P_0$

Využitie:

Pán Novák má zisk z 1000 p.j. 3 p.j. za 38 dní pri tom istom účte.

Model č.3

Aký vklad by musel dať pán Novák do svojej banky pri narodení svojho syna, aby v deň jeho 18 narodenín mu mohol dať ako darček sumu 100000 na kúpu nového auta.

$P = 100000$

$k = 0{,}032$

$P_0 = ?$

$P = P_0.e^{k.t}$

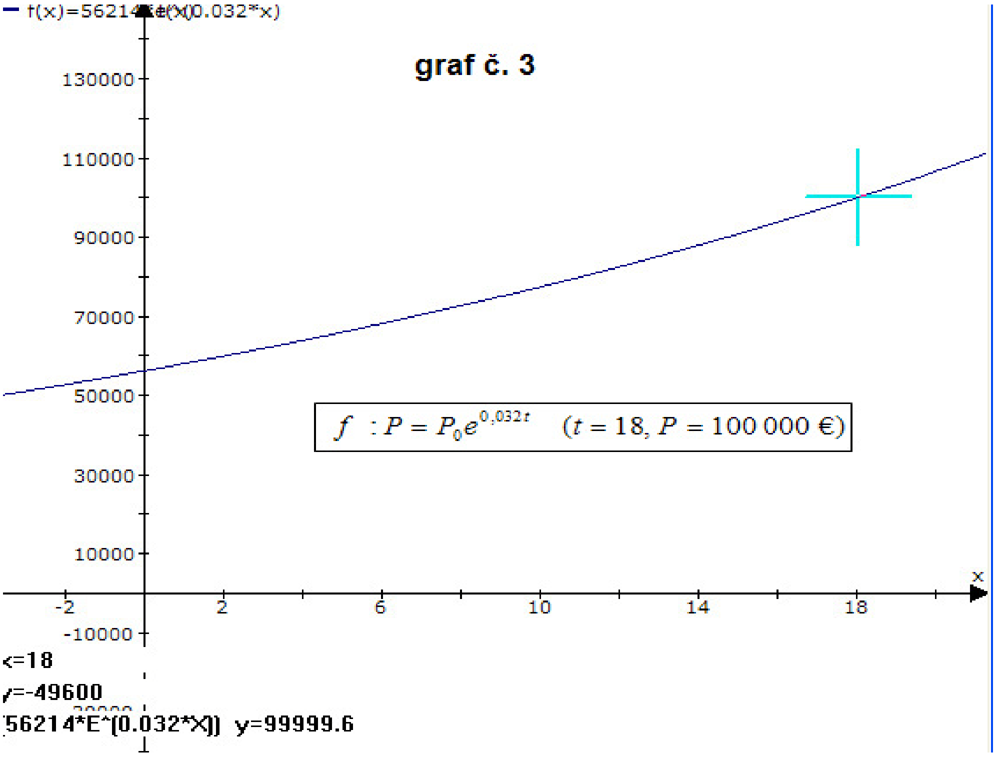
$100000 = P_0.e^{0{,}032.18}$

$100000 = P_0.1{,}7789$

$P_0 = 56214 eur$

Využitie:

Pán Novák musí vložiť do banky 56214 p.j., aby jeho syn dostal k 18-nám nové auto.



Model č.4

Koľko p.j. musí pán Novák vložiť 15. marca na účet v banke ABC, aby na Vianoce 24.decembra mal zisk z úroku 50 p.j.

$P_0 = ?$

$t = 284 dní$

$P = P_0 + 50$

$$P_0 + 50 = P_0 . e^{0,032 . \frac{284}{365}}$$

$$P_0 + 50 = P_0 . e^{0,024899}$$

$$P_0 + 50 = P_0 . 1,0252$$

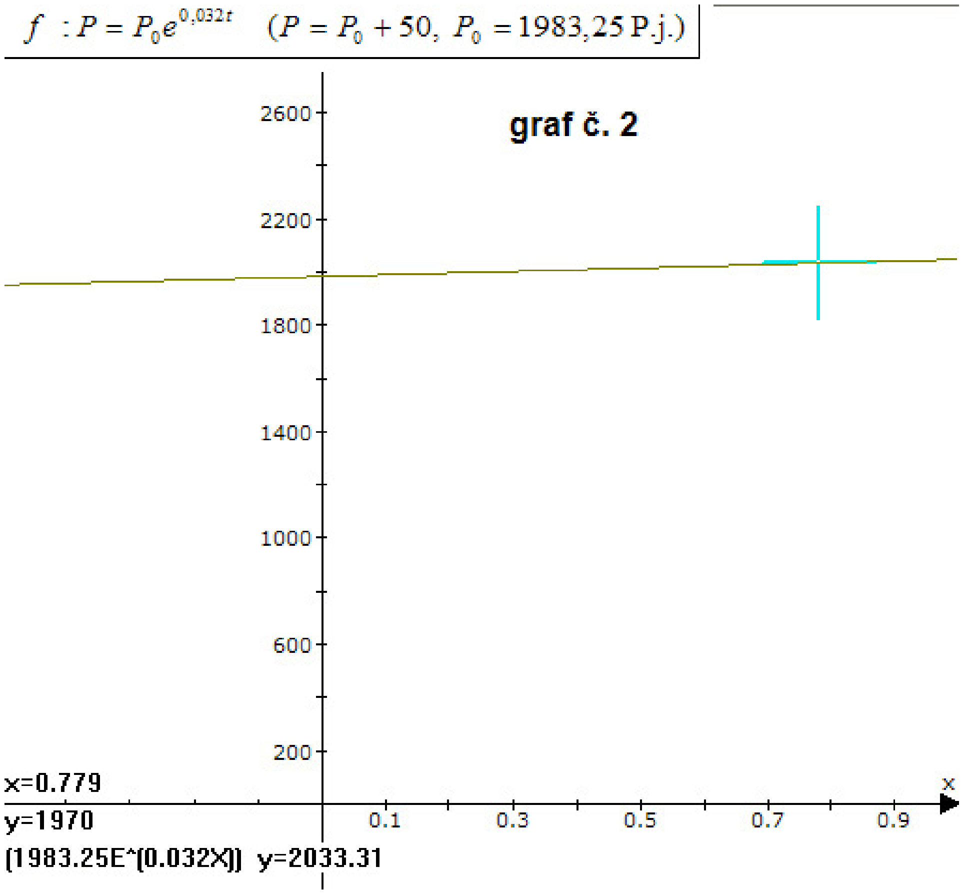
$$P_0 + 50 = 1,0252 . P_0$$

$$50 = 0,0252 . P_0$$

$$P_0 = 1,983,25 p.j.$$

Využitie

Aby mal pán Novák na Vianoce z úroku 50 p.j. ,musí do banky ABC 15. marca vložiť 1983,25p.j.



Model č.5

Pán Novák vyskúša inú banku, do ktorej 12. apríla vložil P_0 p.j. a 19. septembra mal na účte 1,13 P_0 Akú úrokovú sadzbu poskytuje daná banka a aký zisk by mal vo svojej banke ABC za rovnaký čas?

<u>Iná Banka</u>

$P = 1{,}13.P_0$

$k = ?$

$t = ?$

$t = 160\text{dní} = \frac{160}{365}\text{roka}$

$$P = P_0.e^{k.t}$$

$$1{,}13.P_0 = P_0.e^{k.\frac{160}{365}}$$

$$1{,}13 = e^{k.\frac{32}{73}}$$

$$\ln 1{,}13 = \ln .e^{k.\frac{32}{73}}$$

$$\ln 1{,}13 = k.\frac{32}{73}.\ln .e$$

$$\ln 1{,}13 = k.\frac{32}{73}$$

$$k = \frac{\ln 1{,}13}{\frac{32}{73}}$$

$$k = 0{,}2788 = 27{,}88\%$$

Táto banka poskytuje 27,88 % úrok p.a..

<u>Banka ABC</u>

$$P_0 = ?$$

$$t = \frac{160}{365}$$

$$k = 3{,}2\% = 0{,}032$$

$$P = P_0.e^{k.t}$$

$$P = P_0.e^{O{,}O32.\frac{160}{365}}$$

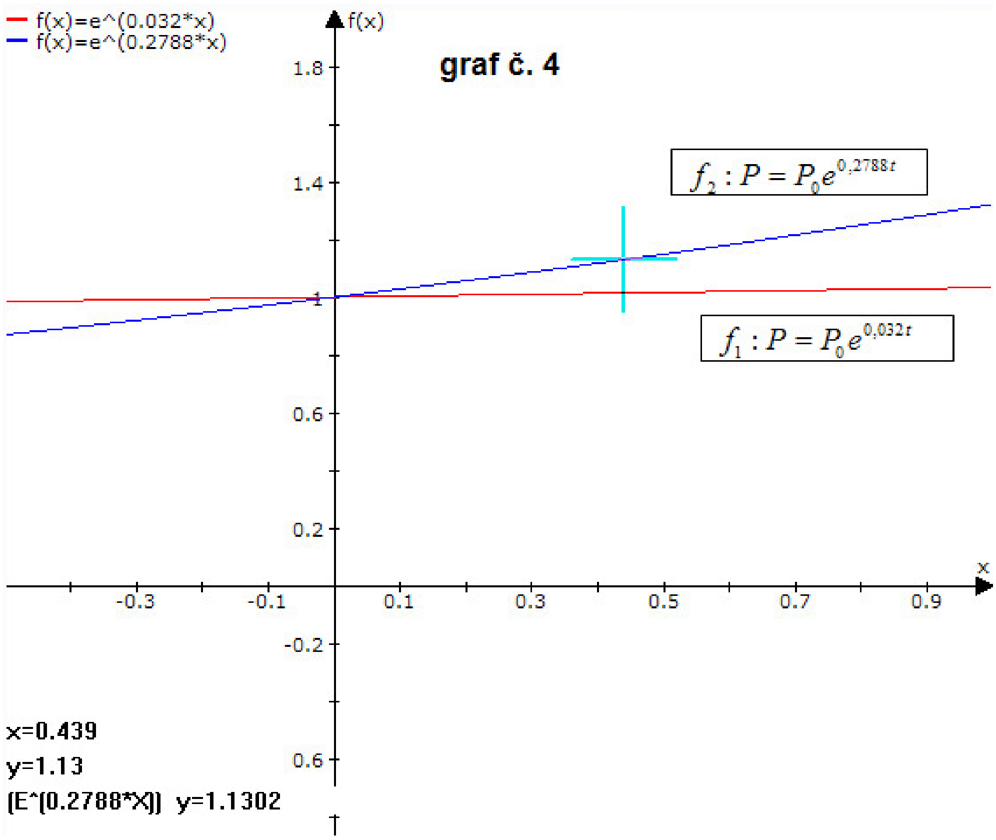
$$P = P_O.e^{0{,}014}$$

$$P = 1{,}0141P_0$$

V banke ABC by mal zisk 1,0141 P_0

Využitie

Keby pán Novák vložil v inej banke vklad 1000 p.j., čistý zisk by mal 130 p.j., naproti tomu v banke ABC by mal len 14,1 eur za 160 dní. Z toho vyplýva, že pre pána Nováka je výhodnejšia druhá banka s vyšším úrokom.


f(x)=e^(0.032*x)
f(x)=e^(0.2788*x)
f(x)
graf č. 4
1.8
1.4
1
0.6
0.2
-0.2
0.6
$f_2 : P = P_0 e^{0,2788t}$
$f_1 : P = P_0 e^{0,032t}$
-0.3
-0.1
0.1
0.3
0.5
0.7
0.9
x
x=0.439
y=1.13
[E^(0.2788*X)] y=1.1302

6 Záver

V tejto práci sme sa venovali tvorbe a využitiu matematických modelov v ekonomickej praxi, ktorá je jednou z častí ekonomickej reality. Pán Novák využil viacej možností zúročenia svojich peňazí a dopracoval sa tak k vyššej prosperite svojho vkladu. Na týchto príkladoch jasne vidíme, akou zaujímavou stupnicou môžeme prehodnotiť svoje peniaze. Po logickej analýze a kritickom posúdení využitia týchto jednoduchých matematických modelov, dospejeme k názoru, že môžu byť veľmi vhodným nástrojom ekonomického rozhodovania.

7 Použitá literatúra

[1] Cipra T.:

Prakticky průvodce finanční a pojistnou matematikou,

Praha: EDICE HZ, 1995, ISBN 80-901918-0-0

[2] D. Orszaghová a kol.:

Aplikované úlohy z matematiky v ekonómií,

Nitra: SPU, 2004, ISBN 80-8069-333-1

[3] D. Orszaghová a kol.:

Matematika a jej aplikácie v obchodných činnostiach,

Nitra: SPU, 2006, ISBN 80-8069-757-4

[4] Ivo Res:

Matematika, Diferenciální rovnice,

Brno: VŠZ, 1988

[5] Jozef Pitel, Dominik Čaprnka:

Matematické metódy 2,

Nitra, VŠP, 1974

[6] J. Sojka, J. Walter a kolektív:

Matematické modelovanie ekonomických procesov,

Bratislava: Alfa, 1986

[7] Karel Rektorys:

Metoda časové diskretizace a parciální diferenciální rovnice,

Praha: SNTL, 1985

[8] Machaček O.:

Finanční a pojistná matematika,

Praha: PROSPEKTUM spol. s.r.o., 2001, ISBN 80-7175-104-9

[9] Melicherčík I., Olšarová I., Úradníček V.:
Kapitoly z finančnej matematiky,
Bratislava: EPOS, 2005

[10] Radová J., Dvorak P.:
Finanční matematika pro každého,
Praha: Grada Publishing,a.s.,2003, ISBN 80-247-0473-0

[11] Slater J., Ponticelli R.:
Business Mathematics for College,
United States of America: Wall Street Journal ed., 1997
ISBN 0-256-23653-4

[12] T. Koščo a kolektív:
Podnikové financie,
Nitra: SPU, 2006, ISBN 80-8069-725-6

[13] http://www.euroekonom.sk/financie/bankovnictvo-a-banky/bankovy-system/

[14] http://www.fhi.sk/files/katedry/km/vedavyskum/prace/2010/sakalova_1_2010.pdf