SLOVENSKÁ POĽNOHOSPODÁRSKA UNIVERZITA

V NITRE

TECHNICKÁ FAKULTA

1127148

APLIKÁCIE INTEGRÁLNEHO POČTU V TECHNICKEJ PRAXI

2010 **Andrej Štefanka**

SLOVENSKÁ POĽNOHOSPODÁRSKA UNIVERZITA
V NITRE
TECHNICKÁ FAKULTA

APLIKÁCIE INTEGRÁLNEHO POČTU V TECHNICKEJ PRAXI

Bakalárska práca

Študijný program:	Prevádzka dopravných a manipulačných strojov
Študijný odbor:	5.2.3 Dopravné stroje a zariadenia
Školiace pracovisko:	Katedra matematiky
Školiteľ:	Mgr. Vladimír Matušek, PhD.

Nitra 2010 **Andrej Štefanka**

Čestné vyhlásenie

Podpísaný Andrej Štefanka vyhlasujem, že som záverečnú prácu na tému „Aplikácie integrálneho počtu v technickej praxi“ vypracoval samostatne s použitím uvedenej literatúry.

Som si vedomý zákonných dôsledkov v prípade, ak uvedené údaje nie sú pravdivé.

V Nitre 15. marca 2010

…..............................

Poďakovanie

Touto cestou by som chcel poďakovať Mgr. Vladimírovi Matušekovi, PhD. za odborné vedenie, pripomienky, konzultácie a cenné rady pri vypracovaní mojej bakalárskej práce.

Abstrakt

V predkladanej práci som sa zaoberal aplikáciami integrálneho počtu v rôznych technických disciplínach. Pre ucelenie problematiky sú v prvej časti uvedené základné definície a vety integrálneho počtu, základné vzorce z technických disciplín ako fyzika, mechanika a pružnosť a pevnosť, ktoré sú nevyhnutné pri aplikačných úlohách. Ďalšia časť práce obsahuje aplikačné príklady na výpočet práce pri predĺžení pružiny, rýchlosti automobilu, objemu rotačného telesa a hľadaniu obsahu rovinného útvaru. Cieľom bakalárskej práce bolo poukázať na možnosti aplikácie matematických poznatkov z oblasti integrálneho počtu v technickej praxi a vytvoriť materiál, ktorý by mohli vyučujúci použiť ako doplnkové pomôcky pri detailnejšom vysvetľovaní spomínanej problematiky.

Kľúčové slová: integrál, objem rotačných telies, obsah rovinných útvarov, aplikačné príklady

Abstract

In the presented work I studied applications of integral calculus in different technical disciplines. To round off the issue, in the first part basic definitions and integral calculus theorems, basic formulae from technical disciplines, such as physics, mathematics and resilience and firmness have been stated, which are indispensable in application problems. The next part of the work includes application problems on calculation of work when elongating the spin, automobile velocity, volume of rotary bodies and search for the surface area of plane shapes. The aim of bachelor thesis was to point to the possibilities of mathematical knowledge from the field of integral calculus in technical practice and to create a database, which could be used by teachers as a supplementary tool when explaining the aforementioned issues in more detail.

Key words: integral, volume of rotary bodies, surface area of plane shapes, application problems

Obsah

Zoznam skratiek a značiek

ρ	**hustota**, odvodená veličina v sústave SI , $[kg/m^3]$
ΔL	**predĺženie,** $[m]$
A	**práca**, odvodená veličina v sústave SI, $[J]$
a	**zrýchlenie**, odvodená veličina v sústave SI, $[m/s^2]$
cm	**centimeter**, odvodená jednotka dĺžky v sústave SI
E	**modul pružnosti v ťahu tlaku**, $[Pa]$
F	**sila**, odvodená veličina v sústave SI, $[N]$
F	**primitívna funkcia k funkcii** f
f	**koeficient šmykového trenia**
f	**funkcia**
$f(x)$	**funkcia** f **premennej** x
G	**tiaž**, odvodená veličina v sústave SI, $[N]$
g	**gravitačné zrýchlenie**, 9,81 , $[m/s^2]$
g	**funkcia**
$g(x)$	**funkcia** g **premennej** x
h	**hranica hĺbky**, $[m]$
J	**joule**, odvodená jednotka práce v sústave SI
J_z	**moment zotrvačnosti k osi z**, $[m^4]$
kg	**kilogram**, základná jednotka hmotnosti v sústave SI
$k \in R.$	k **je prvkom množiny** R
l	**dĺžka**, základná veličina v sústave SI, $[m]$
m	**hmotnosť**, základná veličina v sústave SI, $[kg]$
m	**meter**, základná jednotka dĺžky v sústave SI
mm	**milimeter**, odvodená jednotka dĺžky v sústave SI
N	**newton**, odvodená jednotka sily v sústave SI
P	**tlak**, odvodená veličina v sústave SI, $[Pa]$
Pa	**pascal**, odvodená jednotka tlaku v sústave SI

S	**obsah**, odvodená veličina v sústave SI, $\left[m^2\right]$
SI	**S**ystème **I**nternational
s	**sekunda**, základná jednotka času v sústave SI
s	**dráha**, odvodená veličina v sústave SI, $\left[m\right]$
t	**čas**, základná veličina v sústave SI, $\left[s\right]$
V	**objem**, odvodená veličina v sústave SI, $\left[m^3\right]$
v	**rýchlosť**, odvodená veličina v sústave SI, $\left[m/s\right]$
W	**práca**, odvodená veličina v sústave SI, $\left[J\right]$
$\int f(x)\,dx$	**neurčitý integrál funkcie** x
$\int_a^b f(x)\,dx.$	**určitý integrál funkcie** x **na intervale** $\langle a, b\rangle$

Úvod

Integrálny počet patrí medzi základné časti matematickej analýzy. Študenti sa s integrálnym počtom stretávajú prvý krát väčšinou v poslednom ročníku stredných škôl a gymnázií na matematike, kde sa okrajovo dotýkajú tejto problematiky. Osvoja si základné výpočty neurčitého a určitého integrálu riešia jednoduché príklady venované na výpočet obsahov a objemov. Na vysokých školách sa o integrálnom počte dozvedia hlavne v technických a ekonomických odboroch. No často sa stáva, že študenti nedokážu svoje vedomosti o integráloch získané z matematiky aplikovať do praktických príkladov či už z techniky alebo ekonomiky, a to im znemožňuje pokračovať v riešení daného problému z praxe.

V dnešnej dobe sa na internete nachádzajú stránky, ktoré sa zaoberajú integrálnym počtom. No nie na každej stránke sú vhodne riešené aplikačné príklady a uvedené správne metódy výpočtu, preto môže byť pre študentov ťažké sa na takýchto stránkach zorientovať. A nových knižných publikácií, ktoré by sa zaoberali aplikáciami integrálneho počtu je veľmi málo.

Hlavným cieľom predkladanej práce je poukázať na aplikačné príklady a zrozumiteľnou formou znázorniť riešenie. V tejto práci pre ucelenie problematiky sú uvedené aj definície integrálneho počtu pre neurčitý a určitý integrál. Ku každej metóde riešenia integrálu je priradený aj praktický príklad pre ľahšie pochopenie a precvičenie problematiky. Z matematického a geometrického hľadiska poukážeme na základné príklady týkajúce sa výpočtu dráhy pomocou neurčitého integrálu a pomocou určitého integrálu budeme hľadať obsah rovinnej oblasti. Ďalej sa stretneme s aplikačnými príkladmi z technických disciplín ako sú Fyzika, Technická mechanika a Pružnosť a pevnosť. V týchto podkapitolách budeme príklady riešiť pomocou určitého integrálu. Vo fyzike poukážeme na príklady zaoberajúce sa výpočtom práce a tlaku, a taktiež aj táto podkapitola obsahuje aj základné definície k danej problematike. V podkapitole venovanej technickej mechanike a pružnosti a pevnosti sú riešené príklady zamerané na deformáciu priamych nosníkov, na výpočet práce a príklady na ťah-tlak. V spomenutej problematike sa taktiež nachádzajú základné definície potrebné k výpočtom uvedených príkladov. V týchto podkapitolách sú znázornené metódy výpočtu a taktiež každá podkapitola obsahuje aj vyriešené praktické príklady. V poslednej kapitole sú riešené aplikačné príklady v ktorých budeme hľadať obsah rovinnej oblasti, počítať objem rotačného telesa, prácu pri predĺžení pružiny a rýchlosť automobilu. Moja bakalárska práca by mohla pomôcť študentom ľahšie zvládnuť problematiku integrálneho počtu v technickej praxi.

1 Súčasný stav problematiky

V tejto časti práce sa zameriame na základné definície integrálneho počtu, na definície z oblasti Technickej mechaniky, Pružnosti a pevnosti a Fyziky kapitola je rozdelená do štyroch častí.

1.1 Neurčitý integrál

1.1.1 História

História integrálov sa datuje už od dôb starovekých Grékov, a existujú dôkazy že už aj staroveký Egypťania disponovali týmto poznaním. Na začiatku novoveku sa s riešením úlohy o voľnom páde zaoberal G. Galilei. V tejto úlohe sa jednalo o zrýchlený pohyb, pri ktorom bola začiatočná rýchlosť nulová. Pomocou rovnice rýchlosti vyjadril funkciu dráhy. K tejto funkcii rýchlosti našiel takú funkciu dráhy, ktorej deriváciou bola pôvodná funkcia. Medzi najslávnejších vedcov, ktorý sa zaoberali problematikou integrálneho počtu patria:

- Archimedes,
- Indický matematik Bhaskara,
- Indický matematik Madhava,
- Gottfried Wilhelm Leibniz,
- Isaac Newton.

Práve posledných dvoch považujeme za objaviteľov integrálneho počtu, preto považujeme 17.storočie za zlom v histórii integrálneho počtu. Dodnes sa nevie, ktorý z týchto dvoch bol prvým objaviteľom. Najdôležitejšia Leibnizova publikácia bola jeho matematická notácia. Rozpor medzi Leibnizom a Newtonom vyvrcholil až k rozdeleniu matematikov na dva tábory. Newtonova notácia nebola ani z ďaleka tak pohodlná ako Leibnizova, no aj napriek tomu bola používaná vo Veľkej Británii až do konca 19. storočia, kedy sa podarilo Analytical Society zaviesť Leibnizovo značenie aj na britských ostrovoch.

Medzi ďalších vedcov, ktorý sa pričinili o rozvoj integrálneho počtu patria Barrow, Descart, Fermat, Huygens a Wallison.

1.1.2 Neurčitý integrál a jeho vlastnosti

Neurčitý integrál pojednáva o metódach hľadania primitívnych funkcií, ktorých derivácia je rovná vopred danej funkcii. Jedná sa o pomerne zložité výpočty, a preto sa neurčitý integrál zužuje len na niektoré metódy a typy funkcií. Predovšetkým je to priama, substitučná metóda a metóda per partes. (Matejdes, 2005)

Ďalej uvedené definície , vety ,vzorce sú použité aj v ďalších kapitolách.

Definícia 1. Primitívna funkcia: Funkcia $F(x)$ na intervale (a,b) sa nazýva primitívnou funkciou k funkcii $f(x)$, ak platí : $F'(x)=f(x)$

Veta 1.: Nech funkcia $F(x)$ je primitívna funkcia k funkcii $f(x)$ na intervale (a,b) . Potom aj funkcia $F(x)+c$ je primitívna k funkcii $f(x)$ na intervale (a,b) .

Veta 2.: Nech $F_1(x), F_2(x)$ sú dve primitívne funkcie k funkcii $f(x)$ na intervale (a,b) . Potom rozdiel týchto funkcií sa rovná konštantnej funkcii.

Definícia 2. Neurčitý integrál: Množinu všetkých primitívnych funkcií k funkcii $f(x)$ na intervale (a,b) nazývame neurčitým integrálom funkcie $f(x)$ na intervale (a,b) a označujeme ho: $\int f(x)\,dx=F(x)+c, c\in R.$

Veta 3.: Ak funkcia $f(x)$ je spojitá na intervale (a,b) , potom k funkcii $f(x)$ existuje primitívna funkcia.

Veta 4.: Nech k funkciám $f(x)$ a $g(x)$ existujú primitívne funkcie. Nech $k\in R.$

Potom platí :

$$\int (f(x)\pm g(x))\,dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx$$

$$\int [k.f(x)]\,dx=k\int f(x)\,dx.$$ (Országhová, 2008)

1.1.3 Vzorce integrovania

V tejto podkapitole uvedieme základné vzorce potrebné k integrovaniu.

Veta 5.: Základné vzorce integrovania:

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad pre \quad n \neq 1 \tag{1}$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + c \tag{2}$$

$$\int e^x \, dx = e^x + c \tag{3}$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad pre \ 0 \tag{4}$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c \tag{5}$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c \tag{6}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c \tag{7}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + c \tag{8}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + c \\ -\operatorname{arccotg} x + c \end{cases} \tag{9}$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + c \qquad \text{pre} \quad a \neq 0 \tag{10}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \arcsin x + c \\ -\arccos x + c \end{cases} \tag{11}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c \qquad \text{pre} \quad a \neq 0 \tag{12}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c \tag{13}$$

(Országhová, 2008)

1.1.4 Metódy výpočtu neurčitého integrálu

Keďže v aplikovaných úlohách budeme počítať integrály na ukážku uvedieme niekoľko matematických príkladov na výpočet neurčitého integrálu.

Príklad 1. :Priame integrovanie. Vypočítajte $\int \frac{x^2-x+1}{x^3}\,dx$

Riešenie: Danú funkciu vhodne upravíme, to znamená že si ju rozložíme na zlomky , ktoré sa nám budú ľahšie integrovať. Pri integrovaní použijeme vzorce zo základnej tabuľky a to (1) a (2) .

$$\int \frac{x^2-x+1}{x^3}\,dx=\int \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)dx=\int \frac{1}{x}\,dx-\int x^{-2}\,dx+\int x^{-3}\,dx=$$

$$=\ln|x|-\frac{x^{-1}}{-1}+\frac{x^{-2}}{-2}+c=\ln|x|+\frac{1}{x}-\frac{1}{2\mathrm{x}^2}+c$$

<u>Veta 5.</u> substitučná metóda pre neurčitý integrál

Nech $f(x)$ je spojitá funkcia a $x=g(t)$ má spojitú deriváciu.

Potom: $\int f(x)\,dx=\int f(g(t))g'(t)\,dt,$

kde do výsledku na ľavej strane dosadzujeme za x funkciu $g(t)$, resp do výsledku na pravej strane za t funkciu $g^{-1}(x)$.

Príklad 2.: Substitučná metóda pre neurčitý integrál. Vypočítajte $\int \sin^3 t\cos t\,dt$

Riešenie :

$$\int \sin^3 t\cos t\,dt=\left|\begin{array}{c} x=\sin t\\ dx=\cos t\,dt\end{array}\right|=\int x^3\,.\cancel{\cos t}\,.\frac{dx}{\cancel{\cos t}}=\int x^3\,dx=\frac{x^4}{4}=\frac{1}{4}\sin^4 t+c,$$

<u>Veta 6. metóda</u> per partes pre neurčitý integrál

Ak f a g majú spojité derivácie, potom platí:

$$\int f(x)g'(x)\,dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,dx$$

Príklad 3.: Per partes pre neurčitý integrál. Vypočítajte $\int arctg\, x\, dx$

Riešenie 3.:

$$\int arctg\, x\, dx = \begin{vmatrix} u = arctg\, x, & v' = 1 \\ u' = \dfrac{1}{1+x^2}, & v = x \end{vmatrix} =$$

$$= x\, arctg\, x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x\, arctg\, x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2} dx = x\, arctg\, x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$$

(Matejdes, 2005)

1.1.5 Aplikácia neurčitého integrálu

V domácej a zahraničnej literatúre, na internete sa vyskytujú rôzne úlohy zamerané na použitie neurčitého integrálu, dve takéto úlohy teraz uvedieme.

Príklad 4.: Rýchlosť lode je daná rovnicou $v(t) = 5\mathrm{t} + 2$. Vyjadrite dráhu s ako funkciu času, ak v čase $t = 2$ minúty mala loď prejdenú dráhu 40 metrov. Akú dráhu mala loď prejdenú v čase $t = 0$?

Riešenie: Dráha sa vyjadrí ako integrál z rýchlosti t.j.

$$s(t) = \int v(t)\, dt = \int (5\mathrm{t} + 2)\, dt = \frac{5}{2}t^2 + 2\mathrm{t} + c.$$

Pretože $s(2) = 40$,tak

$$40 = \frac{5}{2}2^2 + 2(2) + c \Rightarrow 40 = 14 + c \Rightarrow c = 26$$

Loď za t minút prejde dráhu

$$s(t) = \frac{5}{2}t^2 + 2\mathrm{t} + 26\, metrov.$$

V čase $t = 0$ mala loď prejdenú dráhu $s(0) = 26\, metrov$

Príklad 5.: Prírastok obyvateľstva v danom regióne v roku t je modelovaný funkciou $r(t) = 5200\mathrm{t}^{1.02}$. Nájdite závislosť počtu obyvateľov p od času, ak v súčastnosti žije v regióne 250000 obyvateľov a aký počet obyvateľov bude mať región o 5 rokov?

Riešenie: Počet obyvateľov p v čase t je rovný

$$p(t)=\int r(t)dt=5200t^{1.02}\,dt=\frac{5200}{2.02}t^{2.02}+c=2574t^{2.02}+c.$$

Pretože $p(0)=250000$ tak $c=250000.$ Počet obyvateľov v čase t je modelovaný funkciou

$$p(t)=2574\,t^{2.02}+250000.$$

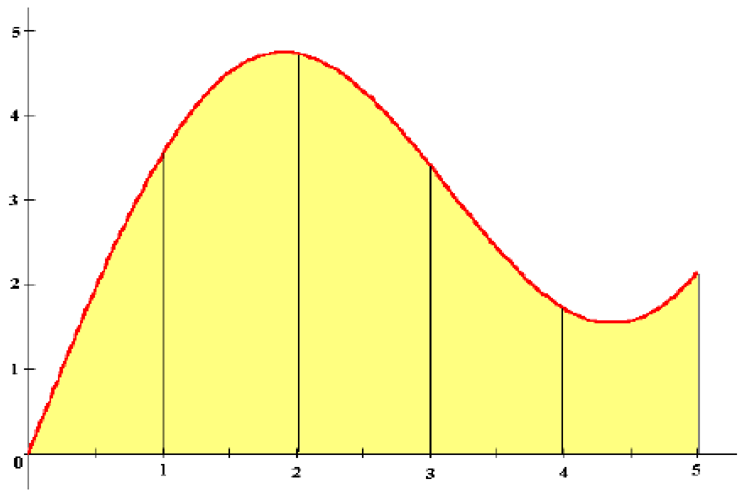
O päť rokov bude mať región $p(5)=2574(5^{2.02})+250000=316455$ obyvateľov.

(Matejdes, 2005)

1.2 Určitý integrál

Určitý integrál má široké uplatnenie v rôznych vedných odboroch. V matematike sa používa na výpočet obsahov útvarov ohraničených rôznymi krivkami, a objemov rotačných telies ktoré vzniknú rotáciou danej plochy okolo súradnicovej osy. Určitý integrál má široké uplatnenie aj v technických disciplínach ako sú : fyzika, technická mechanika, pružnosť a pevnosť, tekutinové mechanizmy. Ďalej sa budeme zaoberať teóriou určitého integrálu , ktorá je použitá v ďalších kapitolách.

1.2.1 Definície určitého integrálu



Obr. 1 Určitý integrál

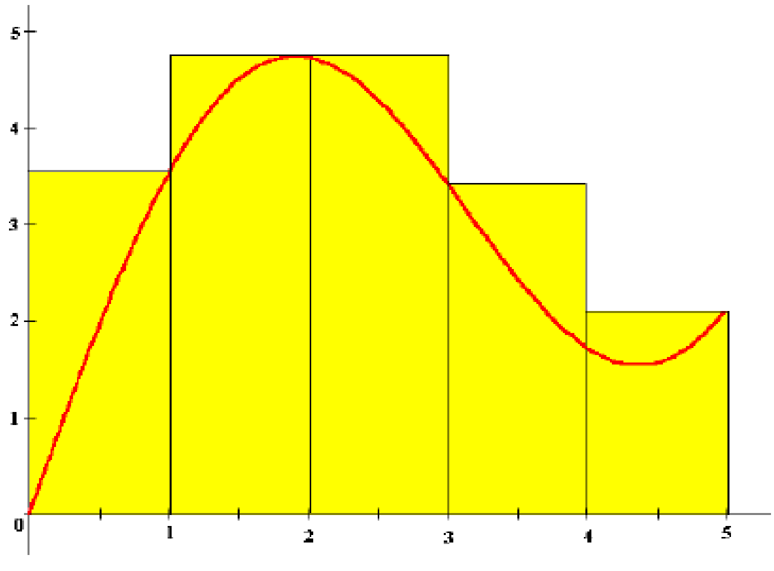
<u>Definícia 1. Delenie intervalu.</u> Nech $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b.$ Potom množinu bodov $D_n=\{x_{0,}x_{1,}\ldots x_n\},$ nazývame delením intervalu $\langle a,b\rangle$. Dĺžku $k-\text{tého}$ čiastkového intervalu označíme $\Delta x_k,$ kde $\Delta x_k=x_k-x_{k-1},$ $k=1,2,\ldots,n.$ Nech m_k je infimum a M_k je suprémum funkcie na $k-\text{tom}$ čiastkovom intervale. Tieto hodnoty podľa predpokladu existujú.

<u>Definícia 2. Horný integrálny súčet.</u> Súčet $s(f,D_n)$ tvaru

$$S(f,D_n)=M_1\Delta x_1+M_2\Delta x_2+\ldots+M_n\Delta x_n=\sum_{k=1}^{n}M_k\Delta x_k$$

nazývame horný integrálny súčet funkcie f na intervale $\langle a,b\rangle$.

To znamená že horný integrálny súčet predstavuje súčet obsahov obdĺžnikov so základňou Δx_k a výškou M_k , ktorých horná základňa nepresiahne popod krivku $f(x).$ Situácia je znázornená na obrázku (Obr. 2). Množina všetkých horných integrálnych súčtov je ohraničená, avšak zdola, teda má infimum.



Obr. 2 Horný integrálny súčet

Takýchto súčtov existuje zrejme nekonečne veľa, v závislosti od počtu deliacich bodov x_1 , a platí nerovnosť $s(f,D_n)\leqslant S(f,D_n),$ vzhľadom k tomu, že $m_k\leqslant M_k$ pre všetky k . Čím menšia je norma delenia, teda čím väčšie n zvolíme, tým lepšie aproximuje obsah daného útvaru.

Definícia 3. Horný integrál. Infimum množiny všetkých množín horných súčtov nazývame horný integrál funkcie f na intervale $\langle a, b \rangle$ a označujeme ho

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Definícia 4. Dolný integrálny súčet a dolný integrál. Tieto definície sú uvedené v literatúre (Matematika a jej aplikácie , Dana Országová a kolektív, 2008)

Veta 1. Nech funkcie $f_{1,} f_{2,} \cdots, f_n$ sú integrovateľné na intervale $\langle a, b \rangle$ a nech $k_{1,} k_{2,} \ldots, k_n \in R.$ Potom aj funkcia $k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \ldots + k_n f_n(x)$ je integrovateľná a platí

$$\int_a^b \left(k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) +, \ldots, k_n f_n(x)\right) dx =$$

$$= k_1 \int_a^b f_1(x)\,dx + k_2 \int_a^b f_2(x)\,dx + \ldots + k_n \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Veta 2. Nech funkcia f nadobúda na intervale $\langle a, b \rangle$ nezáporné hodnoty a je na tomto mieste integrovateľná, potom platí

$$\int_b^a f(x)\,dx \geqslant 0.$$

Veta 3. Nech funkcia f je integrovateľná na intervaloch $\langle a, c \rangle$ a $\langle c, b \rangle$. Potom funkcia $f(x)$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b \rangle$ a platí

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Veta 4. Nech funkcia f je na intervale $\langle -a, a \rangle$ integrovateľná a nepárna, potom platí $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

Teraz zhrnieme základné vlastnosti určitého integrálu pri splnení predpokladov predchádzajúcich viet:

1. $\int_a^b c.f(x)\,dx = c.\int_a^b f(x)\,dx$

2. $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

3. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

4. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

5. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ (Országhová, 2008)

1.2.2 Metódy výpočtu určitého integrálu

Veta 5. Newtonova – Leibnizova formula

Nech funkcia f je integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$ a nech F je primitívna funkcia k danej funkcii f na intervale (a, b). Potom platí

$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$. (Országhová, 2008)

Príklad 1.: Vypočítajte daný integrál podľa Newtonovej-Leibnizovej formule.

$\int_{-1}^{3} (x^3 - 3x^2 + 1)\,dx$

Riešenie :

$$\int_{-1}^{3} \left(x^3 - 3x^2 + 1\right) dx = \left[\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^3}{3} + x\right]_{-1}^{3} =$$

$$= \left(\frac{3^4}{4} - 3^3 + 3\right) - \left(\frac{(-1)^4}{4} - (-1)^3 - 1\right) = \frac{81}{4} - 27 + 3 - \frac{1}{4} - 1 + 1 = 20 + (-24) = -4$$

(Baraníková, 2003)

Veta 6. Substitučná metóda pre určitý integrál

Nech funkcia f je spojitá na intervale $\langle t_{1,} t_2 \rangle$ spojitú deriváciu. Nech funkcia g má na intervale $\langle a, b\rangle$ spojitú deriváciu. Nech pre všetky $x \in \langle a, b\rangle$ je $g(x) \in \langle t_{1,} t_2\rangle$. Nech $t_1 = g(a)$ a $t_2 = g(b)$. Potom platí

$\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt = \int_a^b f(g(x))g'(x)dx$. (Országhová, 2008)

Príklad 2. Vypočítajte daný integrál substitučnou metódou $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx$

Riešenie :

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}} = \left| \begin{array}{ll} substit\acute{u}cia: & \\ u = 4 - x^2 & x = 0 \rightarrow u = 4 \\ du = -2x\,dx \quad , & x = \sqrt{3} \rightarrow u = 1 \\ x\,dx = -\dfrac{du}{2} & \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_1^4 u^{\frac{-1}{2}} du = \left[\sqrt{u}\right]_1^4 = 1$$

(Baraníková, 2003)

Veta 7. Metóda Per Partes pre určitý integrál

Nech funkcie u, v, u', v' sú na intervale $\langle a, b\rangle$ spojité, potom platí

$$\int_a^b u'(x).v(x)dx = \left[u(x).v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x).v'(x)dx.$$

(Országhová, 2008)

Príklad 3.: Vypočítajte daný integrál metódou Per Partes $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin x\, dx$

Riešenie :

$u = x$, $v' = \sin x$
$u' = 1$, $v = -\cos x$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin x dx = \left[-x \cdot \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \left[-x \cdot \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$ (Baraníková, 2003)

1.2.3 Aplikácie určitého integrálu

V matematike používame určitý integrál na výpočet obsahu rovinného útvaru (príklad 4.), ďalej na výpočet objemu rotačného telesa, povrchu rotačného telesa a dĺžky telesa a dĺžky krivky.

Obsah rovinného útvaru ohraničeného krivkou $y=f(x)$ a osou x na intervale $\langle a,b\rangle$ počítame podľa vzorca

$$S=\int_a^b f(x)\,dx\,,\ ak\ \forall x\in\langle a,b\rangle : f(x)\geq 0. \tag{14}$$

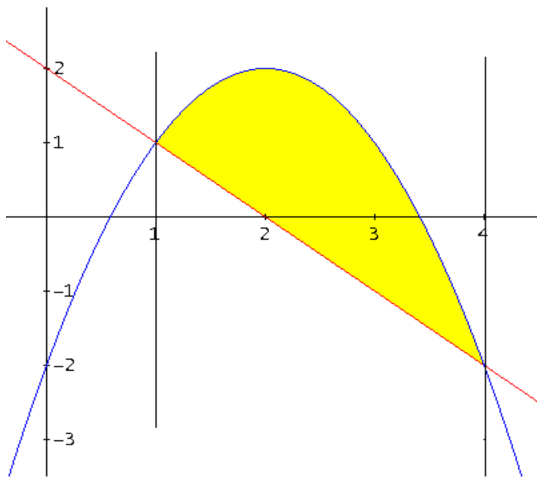
Objem telesa, ktoré vznikne rotáciou plochy ohraničenej krivkami $y=f(x), x=a, x=b, y=0$ okolo osi x počítame podľa vzorca

$$V=\lim_{n\to\infty} S_f(D_n)=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx. \tag{15}$$

(Országhová, 2008)

Príklad 4. Vypočítajte plošný obsah časti roviny ohraničenej krivkami $y=-x^2+4\mathrm{x}-2\,,\ y=2-x$

Riešenie : Útvar ktorého obsah budeme počítať je znázornený na obrázku (Obr. 3)



Obr. 3 Rovinný útvar

Najprv si určíme priesečníky oboch kriviek

$$-x^2+4\mathrm{x}-2=2-x$$

$$0=x^2-5\mathrm{x}+4$$

$$D=(-5)^2-4.1.4=9$$

$$x_1=\frac{-(-5)-\sqrt{9}}{2.1}=\frac{5-3}{2}=1$$

$$x_2=\frac{-(-5)+\sqrt{9}}{2.1}=\frac{5+3}{2}=4$$

Obsah určíme podľa vzorca (14.)

$$S=\int_a^b(f(x)-q(x))\,dx=\int_1^4((-x_2+4\mathrm{x}-2)-(2-x))\,dx=\int_1^4(-x_2+5\mathrm{x}-4)\,dx=$$

$$\left[\frac{-x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-4x\right]_1^4=\left(\frac{-4^3}{3}+\frac{5.4^2}{2}-4.4\right)-\left(\frac{-1^3}{3}+\frac{5.1^2}{2}-4.1\right)=$$

$$\left(\frac{-64}{3}+40-16\right)-\left(\frac{-1}{3}+\frac{5}{2}-4\right)=\frac{-128+240-96+2-15+24}{6}=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}$$

(Pokorný, 2007)

1.3 Aplikácie integrálneho počtu z Technickej mechaniky

V ďalšej podkapitole sa budeme zaoberať aplikáciami integrálneho počtu v Technickej mechanike. Využijeme v nej poznatky z predchádzajúcich podkapitol kde sme definovali určitý integrál.

Hlavnou úlohou prírodných vied, a teda aj mechaniky, je poznávať zákonitosti a súvislosti javov a ich zmien v prírode tak, aby ich človek mohol čo najlepšie využiť na ovládnutie prírody v prospech spoločnosti.(Šesták, 1985)

1.3.1 Úvod do Technickej mechaniky

Všetky reálne hmotné objekty na seba navzájom pôsobia. Toto vzájomné pôsobenie hodnotíme veličinou, ktorú nazývame sila. Ak na hmotný objekt pôsobí viac síl, hovoríme, že naň pôsobí silová sústava. Statika sa zaoberá rovnováhou silových sústav pôsobiacich na hmotný objekt. Hmotný objekt predstavuje bod, teleso alebo sústavu telies v rovine alebo v priestore.

Medzi typické úlohy statiky patrí :

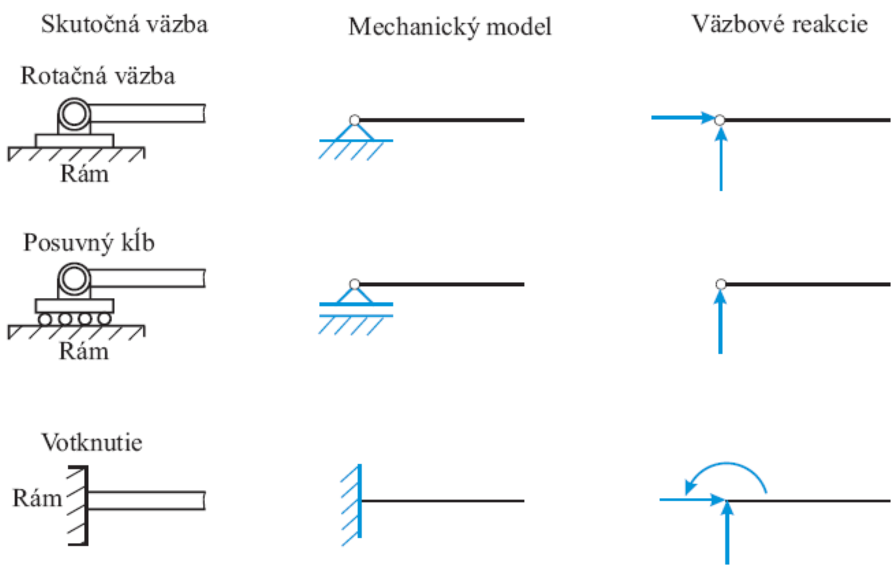
-nájdenie rovnováhy silovej sústavy, pri ktorej nastáva rovnováha hmotného objektu v danej polohe,

-nájdenie rovnovážnej polohy pri danej pôsobiacej silovej sústave a stanovenie podmienok statickej ekvivalencie silových sústav.

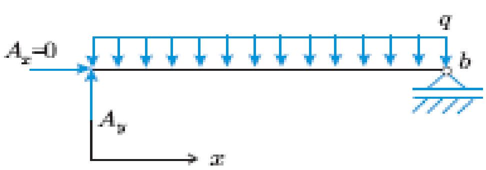
Statika je základom všetkých ostatných častí mechaniky. V mechanike tuhých telies na ňu bezprostredne nadväzuje dynamika, v mechanike poddajných telies pružnosť, pevnosť a plasticita. Obe disciplíny poznatky zo statiky ďalej rozvíjajú a prehlbujú. Ako na statiku nadväzujú niektoré technické disciplíny, tak statika nadväzuje na poznatky všeobecných disciplín ako sú matematika a fyzika. (Kučera, 2008)

1.3.2 Väzby a väzbové reakcie

V tejto podkapitole zadefinujeme väzbové reakcie , pretože v ďalších kapitolách z Technickej mechaniky ale aj v Pružnosti a pevnosti budeme riešiť príklady na určovanie reakcií vo väzbách.



Obr. 4 Väzby a väzbové reakcie



Obr. 5 Reakcia A

Väzby - je to určité obmedzenie pohybu danej sústavy resp. telesa - odoberajú mu určitý počet stupňov voľnosti. Samotné obmedzenie v skutočnosti je realizované pôsobením iného telesa alebo inej sústavy na skúmaný objekt, pričom toto pôsobenie sa zjednodušuje - zavádza sa pojem väzba (alebo kinematická dvojica).

Väzbové reakcie - sú sekundárne (reakčné) sily vo väzbách, vyvolané zaťažujúcimi primárnymi (akčnými) silami pôsobiacimi na upevnené teleso.

Stupeň voľnosti - charakterizuje možnosť" pohybu telesa alebo sústavy. V priestore má teleso 6 stupňov voľnosti - 3 translačné stupne (v smere x, y a z) a 3 rotačné stupne (okolo osi x, y a z). V rovine má teleso 3 stupne voľnosti - 2 translačné (v smere x a y) a jeden rotačný (okolo osi z) stupeň voľnosti.

Väzby rozdeľujeme do dvoch hlavných skupín:

• vnútorné - viažu sa na objekty, ktoré spolu s nimi vytvárajú sústavu

• vonkajšie - viažu objekt na rám - nepohyblivé teleso

Pri určovaní reakcií vo väzbách sa postupuje nasledovne:

1. skúmaný objekt uvoľníme, t.j. odstránime väzby a nahradíme ich väzbovými reakciami

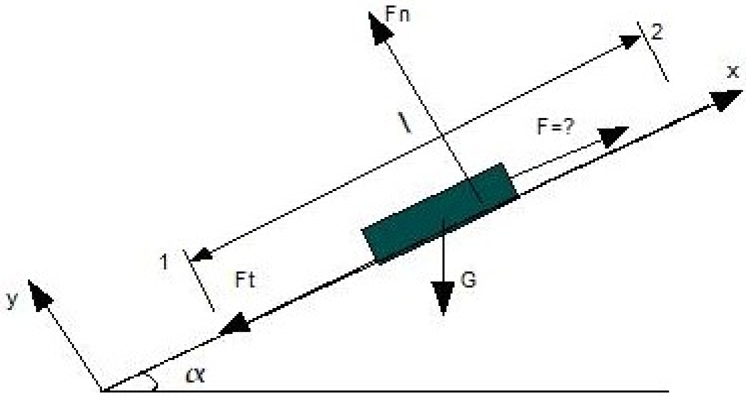
2. predpokladáme určitú orientáciu väzbových síl - zakreslíme ju do obrázka

3. pre staticky určité úlohy napíšeme statické podmienky, ktorých vyriešením dostávame hľadané reakcie. Ak ich hodnota nám vyjde so znamienkom plus, potom pôsobia tak, ako sme ich do obrázka zakreslili. Záporné reakcie pôsobia v skutočnosti v opačnom zmysle. (Kutiš, 2010)

1.3.3 Aplikačné príklady z Technickej mechaniky a Pružnosti a pevnosti

V tejto podkapitole sa zameriame na niektoré tipy aplikačných príkladov, ktoré využívajú integrálny počet.

Príklad 1. : Určite prácu potrebnú k premiestneniu telesa tiaže $G=50\,N$ po naklonenej rovine z polohy 1 do polohy 2. Uhol naklonenej roviny $\alpha=30^0$, koeficient šmykového trenia $f=0{,}15$, vzdialenosť polôh 1 a 2 je $l=2\text{m}$ .Situácia je znázornená na obrázku (Obr. 6)



Obr. 6 Teleso na naklonenej rovine

Riešenie: Zvolíme si súradnicový systém, teleso uvoľníme a napíšeme podmienky rovnováhy

$$\sum F_{ix}=0 \qquad F-G\sin\alpha-F_T=0$$

$$\sum F_{iy}=0 \qquad F_n-G\cos\alpha=0$$

$$F_T=F_n\, f$$

Odtadiaľ stanovíme silu $F=G\sin\alpha+G\cos\alpha$ a jej elementárnu prácu

$$dA=-Fdx$$

$$A=-\int_0^l G(\sin\alpha+f\cos\alpha)\,dx \quad (16.)$$

$$A=-G(\sin\alpha+f\cos\alpha)l=-50(sin30^0+0{,}15\,cos30^0)2=-62{,}99\,Nm$$

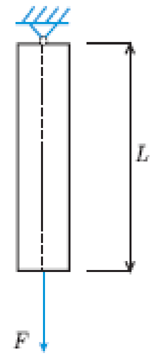
Práca potrebná na premiestnenie telesa je $-62{,}99\,Nm$ (Šesták, 1985)

Príklad 2. : Teraz uvedieme príklad na Ťah-Tlak

Izolátor na obrázku (Obr. 7) je zaťažený ťahovou silou $F = 5000\,N$ – pôsobenie vodiča.

Vplyv vlastnej tiaže uvažujte raz ako diskrétnu silu s pôsobiskom v ťažisku a druhý raz ako spojite rozloženú silu, pričom merná hmotnosť' materiálu izolátora je $\rho = 2300\,kg/m^3$. Dĺžka izolátora je $L = 1\,m$. Prierez izolátora je $S = 0,03\,m^2$. Modul pružnosti v ťahu $E = 1 \times 105\,MPa$. Vypočítajte reakcie v uložení, celkové predĺženie izolátora a nakreslite priebeh vnútorných síl.

Riešenie :

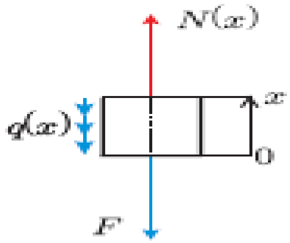


Obr. 7 Izolátor

Tento príklad vyriešime tak že tiaž budeme považovať ako spojite rozloženú silu.

Pri spojite rozloženej hmotnosti už okrem F nepôsobí v poli prúta iná diskrétna sila, celý priebeh vnútorných síl sa popíše iba jedným úsekom.

- Úsek $x \in \langle 0, L \rangle$:

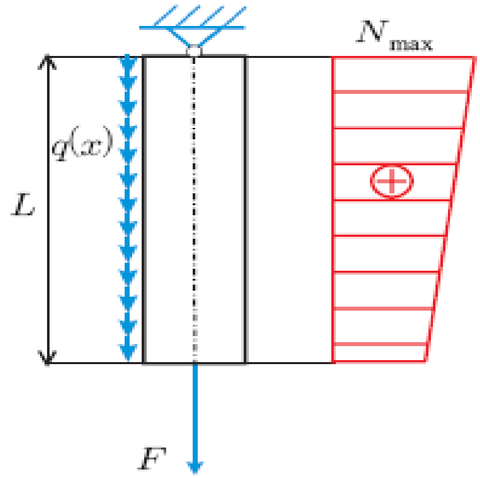


Obr. 8 Celkové predĺženie ΔL

$V = 0 : N(x) - F - q(x) = 0$ pričom $q(x) = S \cdot x \cdot \rho \cdot g$ teda $N(x) = F + S \cdot x \cdot \rho \cdot g$

$$\Delta L = \frac{1}{SE} \int_0^L N(x)\, dx = \frac{1}{SE} \left[FL + S \rho g \frac{L^2}{2} \right] = 1{,}78 . 10^{-8}\, m$$

Priebeh vnútorných síl :



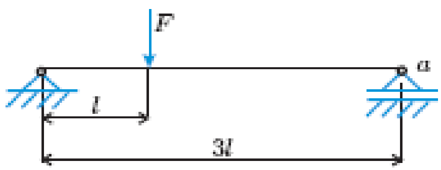
Obr. 9 Priebeh vnútorných osových síl pri spojite rozloženej tiaži.

(Kutiš, 2010)

Príklad 2 môžeme riešiť aj tak že tiaž budeme považovať za diskrétnu silu.

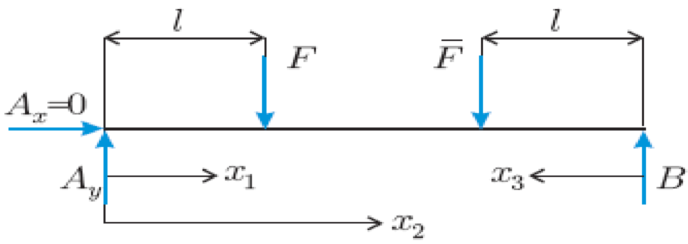
Teraz uvedieme príklad na deformáciu priamych nosníkov.(príklad 3)

Príklad 3. Určite priehyb hriadeľa elektrického točitého stroja vo vzdialenosti l od väzby a podľa obrázku (Obr. 10), kvadratický prierezový moment je Jz.



Obr. 10 Zaťažený nosník

Riešenie : Vložíme fiktívnu silu $F = 0$ do miesta, kde chceme určiť priehyb, výpočet reakcií a priebehu $M(x)$.



Obr. 11 Vloženie fiktívnej sily $\bar{F}=0$

Statické podmienky rovnováhy:

$$\sum H=0: A_x=0$$

$$\sum V=0: A_y+B-F-\bar{F}=0 \Rightarrow B=F+\bar{F}-A_y=\frac{1}{3}\left(F+2\bar{F}\right)$$

$$\sum M_a=0: A_y\,3\mathrm{l}-F2l-\bar{F}\;l=0 \Rightarrow A_y=\frac{1}{3}\left(2\mathrm{F}+\bar{F}\right)$$

Momenty pre jednotlivé úseky $\mathrm{x}_1\in\langle 0,\mathrm{l}\rangle, \mathrm{x}_2\in\langle \mathrm{l},2\mathrm{l}\rangle$ a $\mathrm{x}_3\in\langle 0,\mathrm{l}\rangle$:

$$M(x_1)=A_y\,x_1=\frac{1}{3}\left(2\mathrm{F}+\bar{F}\right)x_1$$

$$M(x_2)=A_y\,x_2-F\left(x_2-l\right)=Fl+\frac{1}{3}\left(-F+\bar{F}\right)x_2$$

$$M(x_3)=Bx_3=\frac{1}{3}\left(F+2\bar{F}\right)x_3$$

Určenie priehybu vo vzdialenosti l od väzby a. Podľa Castigliana

$$u\bar{F}=\frac{1}{EJ_z}\left[\int_0^l M(x_1)\frac{\partial M(x_1)}{\partial \bar{F}}dx_1+\int_l^{2l} M(x_2)\frac{\partial M(x_2)}{\partial \bar{F}}dx_2+\int_0^l M(x_3)\frac{\partial M(x_3)}{\partial \bar{F}}dx_3\right]=$$

$$=\frac{1}{EJ_z}\left[\int_0^l \frac{1}{3}\left(2\mathrm{F}+\bar{F}\right)x_1dx_1+\int_l^{2\mathrm{L}}\left(Fl+\frac{1}{3}\left(-F+\bar{F}\right)x_2\right)\frac{1}{3}x_2dx_2+\int_0^l \frac{1}{3}\left(F+2\bar{F}\right)x_3\frac{2}{3}x_3dx_3\right]$$

Pred integráciou položíme $\bar{F}=0$

$$u\bar{F}=\frac{1}{EJ_z}\left[\int_0^l \frac{2}{9}Fx_1^2\,dx_1+\int_l^{2l}\frac{1}{3}Flx_2dx_2-\int_l^{2l}\frac{1}{9}Fx_2^2dx_2+\int_0^l \frac{2}{9}Fx_3^2dx_3\right]=$$

$$=\frac{1}{EJ_z}\left[\frac{2}{27}Fl^3+\frac{2}{3}Fl^3-\frac{8}{27}Fl^3+\frac{2}{27}Fl^3\right]=\frac{14}{27}\frac{1}{EJ_z}Fl^3 \quad \text{(Kutiš, 2010)}$$

1.4 Aplikácie integrálneho počtu vo Fyzike

V tejto podkapitole sa zameriame na niektoré tipy príkladov z fyziky v ktorých je obsiahnutý integrálny počet.

Fyzika je exaktná prírodná veda, ktorá sa zaoberá zákonmi prírody a jej štruktúrou, využíva pritom základné pojmy ako pohyb, čas alebo hmota a vhodne ich matematicky vyjadruje. Fyzika už od dávnej minulosti objasňuje zloženie a fungovanie sveta okolo nás, vo veľkej miere prispela k technologickému pokroku.

1.4.1 Základné definície a vzťahy z Fyziky

V tejto podkapitole zadefinujeme základné vzťahy, ktoré budeme používať pri výpočtoch aplikačných príkladov v ďalšej podkapitole z Fyziky.

Práca:

Na výpočet práce vykonanej silou $F(x)$ pôsobiacou v intervale $\langle a, b\rangle$ používame vzťah:

$$A=\int_a^b F(x)\,dx. \tag{17}$$

Tlaková sila:

Pre výpočet celkovej tlakovej sily (tlaku) kvapaliny v konštantnej hĺbke h sa používa Pascalov zákon $P=\rho ghS.$

kde:

ρ - hustota kvapaliny

$g=9{,}81\, m/s^2$ - gravitačná konštanta

S - veľkosť plochy

Pri meniacej sa hĺbke vypočítame celkový tlak integrálom

$$P=\rho g\int_{h_1}^{h_2} hS(h)\,dh, \tag{18}$$

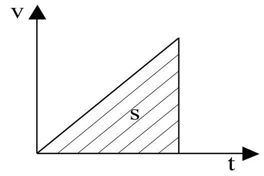
kde :

h_1, h_2 - hranice hĺbky

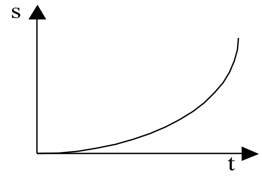
$S(h)$ - veľkosť plochy, na ktorú tlak pôsobí v hĺbke h

(Belan, 2000)

Rovnomerne zrýchlený priamočiary pohyb:



Obr. 12 Rýchlosť



Obr. 13 Dráha

Pre výpočet zrýchlenia, rýchlosti a dráhy platí podľa obrázkov (Obr. 12) a (Obr. 13):

$a = konšt.$

$$v = \int a.dt = at + v_0 \qquad (19)$$

$$s = \int v.dt = \int (at + v)dt = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0 \qquad (20)$$

kde:

v_0 - začiatočná rýchlosť

s_0 - dĺžka dráhy v čase $t=0$ (Babjak, 2004)

1.4.2 Aplikačné príklady z Fyziky

Teraz si ukážeme niektoré druhy aplikačných príkladov integrálneho počtu vo Fyzike, zameriame sa na výpočet práce, tlaku.

Príklad 1. Prvý uvedený príklad sa bude zaoberať výpočtom práce.

Akú prácu potrebujeme na roztiahnutie pružiny o $4\,cm$, ak sila potrebná na jej roztiahnutie o $1\,cm$ je $1\,N$.

Riešenie: Označme x dĺžku, o ktorú je pružina roztiahnutá. Hookov zákon hovorí, že sila potrebná na rozťahovanie pružiny je priamo úmerná dĺžke roztiahnutia pružiny,t.j. $F(x)=kx$.

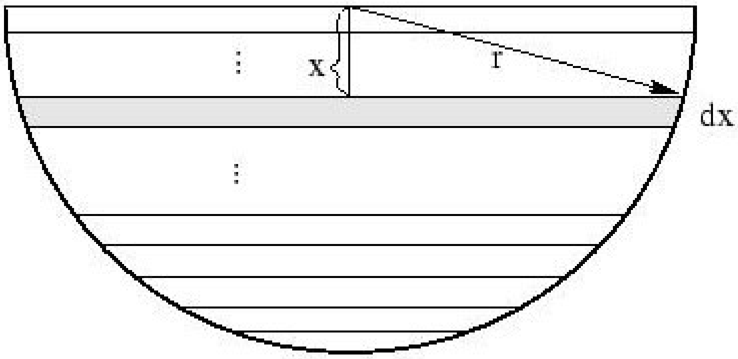
Konštantu k vypočítame z podmienky $F(0{,}01)=k.0{,}01=1$ (kvôli súladu fyzikálnych jednotiek meriame dĺžku v metroch), teda $k=100$. Hladaná práca je

$$A = \int_0^{0{,}04} 100x\,dx = 50\left[x^2\right]_0^{0{,}04} = 0{,}08J.$$

Príklad 2. V druhom príklade za budeme taktiež zaoberať výpočtom práce.

Nájdime prácu potrebnú na odčerpanie vody z koryta tvaru pol valca dĺžky h a polomerom podstavy r.

Riešenie : Rozložme celý objem vody v koryte na veľmi tenké vodorovné vrstvy hrúbky dx .



Obr. 14 Voda v koryte

Tvar vrstvy, ktorá je v hĺbke x pod hladinou môžeme považovať za kváder s rozmermi $h = 2\sqrt{r^2 - x^2}$ (podstava) a dx (výška). Na jej odčerpanie vynaložíme prácu rovnú súčinu jej objemu, hustoty vody ρ , gravitačného zrýchlenia g a dráhy x

$$A(x) = \rho g\, hx 2\sqrt{r^2 - x^2}\, dx.$$

Preto celková práca potrebná na odčerpanie vody je

$$A = \int_0^r 2\rho ghx\sqrt{r^2 - x^2}\, dx = 2\rho gh \int_0^r x\sqrt{r^2 - x^2} = \frac{2}{3}\rho ghr^3$$

Príklad 3. V nasledujúcom príklade sa budeme zaoberať výpočtom tlaku.

Nájdeme tlak vody na vertikálnu sklenenú stenu tvaru polkruhu umiestnenú priemerom dĺžky $6m$ na hladine vody. Hustota vody je $\rho = 1000\, kg.m^{-3}$ a gravitačné zrýchlenie $g = 9{,}81\, m/s^2$.

Riešenie : Celkový tlak na úzky vodorovný pruh steny výšky dh v hĺbke h je rovný veličine $P(h)=\rho ghS(h)$, kde $S(h)=2\sqrt{9-h^2}\,dh$ je obsah pruhu. Potom celkový tlak je limitou súčtu takýchto tlakov $P(h)$ pre $dh\to 0$, preto

$$P=\int_0^3 \rho gh2\sqrt{9-h^2}\,dh=19620\int_0^3 h\sqrt{9-h^2}\,dh=$$

$$=-\frac{19620}{3}\left[\left(9-h^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3=176580\quad Pa$$

Tlak vody pôsobiaci na vertikálnu sklenenú stenu je $P=176580\,Pa$.

(Belan, 2000)

2. Cieľ práce

Cieľom bakalárskej práce je poukázať na možnosti aplikácie matematických poznatkov z oblasti integrálneho počtu v technickej praxi pri modelovaní reálnych situácií vo vybraných technických odboroch (fyzika, statika, dynamika, elektrotechnika, dopravné a manipulačné stroje a ďalšie).

3. Metodika riešenia

- zhromaždenie prehľadu domácej a zahraničnej literatúry
- prehľad matematických poznatkov súvisiacich s danou problematikou (teoretické východiská týkajúce sa integrálneho počtu, vlastností integrálov a spôsob výpočtu)
- aplikácie neurčitého integrálu v technickej praxi
- aplikácie určitého integrálu v technickej praxi
- matematické modely rôznych reálnych situácií, ktoré vedú na použitie integrálneho počtu v technickej praxi vo vybraných oboroch.

V univerzitných knižniciach a pomocou internetového prehliadača sme vyhľadali a zhromaždili domácu a zahraničnú literatúru súvisiacu s riešenou problematikou. Z týchto zdrojov sme vybrali vhodné teoretické východiská týkajúce sa vlastností integrálneho počtu a spôsobu výpočtu. Ako prvé sme za definovali neurčitý integrál a spôsoby jeho výpočtu, ku ktorým sme priradili aplikačné úlohy z technickej praxe. Ďalšou problematikou bol určitý integrál, rovnako ako pri neurčitom sme sme uviedli jeho definície a vybrané aplikačné úlohy. Z technických odvetví sme si vybrali pevnosť a pružnosť, fyziku a technickú mechaniku, kde sme najskôr uviedli základné poznatky z daného odboru a vzorce nevyhnutné k ďalšiemu riešeniu úloh. Po zadefinovaní uvedenej problematiky sme pristúpili k vypracovaniu matematických modelov reálnych situácií kde sme aplikovali integrálny počet.

4. Výsledky práce

V tejto kapitole sa budeme zaoberať aplikačnými príkladmi: Ako prvým začneme príkladom na obsah ďalej na objem, prácu, priamočiary zrýchlený pohyb a kapitolu nám uzavrie príklad na výpočet ťažiska.

4.1 Obsah a objem plochy ohraničenej krivkami

Z definície určitého integrálu vieme, že ho môžeme použiť pri riešení rôznych geometrických úloh ako napríklad hľadaní obsahu a určovaní objemu.

4.1.1 Aplikačný príklad na výpočet obsahu ohraničenom troma krivkami

V literatúre nájdeme úlohy na obsah útvaru ohraničeným dvoma krivkami, zistil som absenciu úloh s troma krivkami. Preto sa budeme teraz takým príkladom zaoberať.

Príklad 1. Vypočítajme obsah časti roviny ohraničenej krivkami :

$y = x^2 - 3x - 4$, $y = 8 - 2x$ a $y = 2x - 4$

Riešenie: Ako prvé si určíme integračné hranice a to tak, že si zistíme priesečníky kriviek, čiže položíme:

- $x^2 - 3x - 4 = 2x - 4$
- $2x - 4 = 8 - 2x$
- $x^2 - 3x - 4 = 8 - 2x$

A teraz si určíme priesečníky, kvôli prehľadnosti si môžeme jednotlivé úseky označiť písmenami A, B, C.

Úsek A:

$$x^2 - 3x - 4 = 2x - 4$$
$$x^2 - 5x = 0$$
$$x(x - 5) = 0$$
$$x_1 = 0, x_2 = 5$$

Úsek B:

$$2x - 4 = 8 - 2x$$
$$4x - 12 = 0$$
$$4x = 12$$
$$x = \frac{12}{4} = 3$$

Úsek C:

$$x^2 - 3x - 4 = 8 - 2x$$

$$x^2 - x - 12 = 0$$

Pomocou Diskriminantu vypočítame korene rovnice.

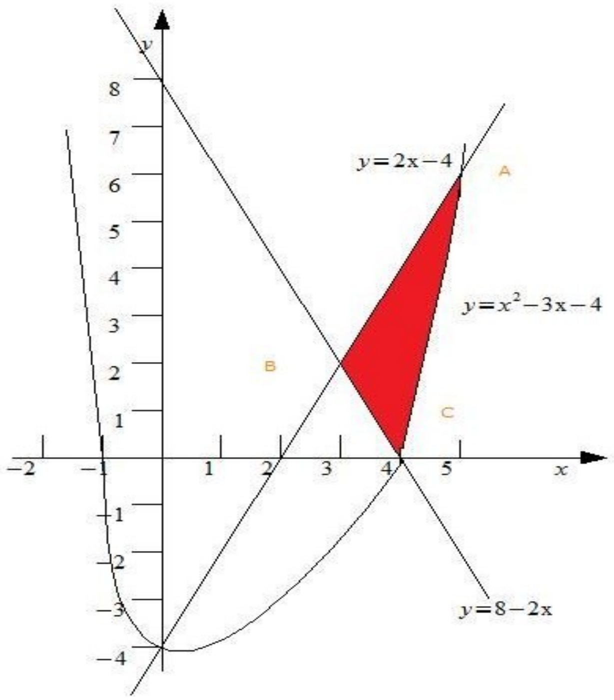
$$D = b^2 - 4ac \qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$D = -1^2 - 4.1(-12) \qquad x_1 = \frac{1+7}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$D = \sqrt{49} \qquad x_2 = \frac{1-7}{2} = \frac{-6}{3} = -2$$

$$D = 7$$

Keď máme všetky priesečníky kriviek môžeme si ich znázorniť na obrázku (Obr. 15).



Obr. 15 Rovinný útvar

Podľa vzorca (15) si napíšeme rovnicu na výpočet obsahu:

$$S = S_1 + S_2$$

$$S = \int_3^4 (2x-4) - (8-2)\,dx + \int_4^5 (2x-4) - (x^2 - 3x - 4)\,dx$$

Pre ľahšie počítanie si rozdelíme obsah na dva S_1 a S_2 .

$$S_1=\int_3^4 (2\mathrm{x}-4)-(8-2\mathrm{x})\,dx$$

$$S_1 = \left[\frac{2x^2}{2} - 4x - 8x + \frac{2x^2}{2}\right]_3^4$$

$$S_1=(16-16-32+16)-(9-12-24+9)=16-16-32+16-9+12+24-9=2\mathrm{j}^2$$

Obsah prvej časti je $S_1=2\mathrm{j}^2$

$$S_2=\int_4^5 (2\mathrm{x}-4)-(x^2-3\mathrm{x}-4)\,dx$$

$$S_2 = \left[\frac{2x^2}{2} - 4x - \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 4x\right]_4^5$$

$$S_2=\left(25-20-\frac{125}{3}+\frac{75}{2}+20\right)-\left(16-16-\frac{64}{3}+24+16\right)$$

$$S_2=25-20-\frac{125}{3}+\frac{75}{2}+20-16+16+\frac{64}{3}-24-16=-15-\frac{61}{3}+\frac{75}{2}=$$

$$S_2=-15+\left(\frac{-122+225}{6}\right)=-15+\frac{103}{6}=2{,}166\,j^2$$

Obsah druhej časti je $S_2=2{,}166\,j^2$

$$S=S_1+S_2$$

$$S=2+2{,}166$$

$$S=4{,}166\,j^2$$

Po súčte jednotlivých obsahov sme vypočítali celkový obsah $S=4{,}166\,j^2$.

4.1.2 Aplikačný príklad na výpočet objemu

Príklad 2. Vypočítajme objem rotačného telesa, ktorý vznikol rotáciou časti roviny ohraničenej krivkami : $y=\frac{4}{x}$ a $y=6-2\mathrm{x}$.

Riešenie: Ako prvé si určíme ich spoločné priesečníky

$$\frac{4}{x}=6-2\text{x}$$

$$4=6\text{x}-2\text{x}^2$$

$$0=6\text{x}-2\text{x}^2-4$$

$$0=2\text{x}^2-6\text{x}+4$$

Pomocou Diskriminantu si určíme korene rovnice

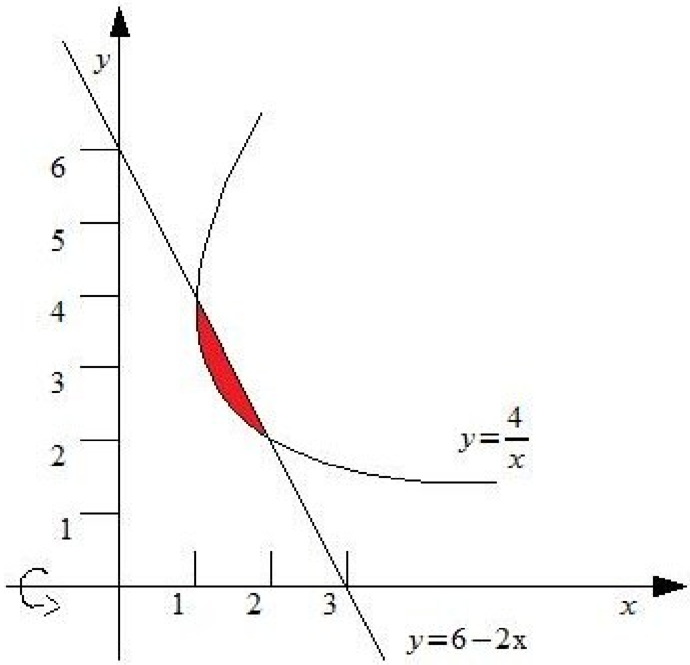
$$D=b^2-4\text{ac} \qquad x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2\text{a}}$$

$$D=-6^2-4.2.4 \qquad x_1=\frac{6+2}{4}=2$$

$$D=\sqrt{36-32} \qquad x_2=\frac{6-2}{4}=1$$

$$D=2$$

Teraz si môžeme nakresliť obrázok situácie (Obr. 16)



Obr. 16 Rotačné teleso

Pomocou vzorca (14) na výpočet objemu si môžeme napísať:

$$V=\pi\int_{1}^{2}(6-2x)^2-\left(\frac{4}{x}\right)^2dx$$

$$V=\pi\int_{1}^{2}(36-24x+4x^2)-\left(\frac{16}{x^2}\right)dx$$

$$V=\pi\left[36-x-\frac{24x^2}{2}+\frac{4x^3}{3}+\frac{16}{x}\right]_1^2$$

$$V=\pi\left[72-48+\frac{32}{3}+8\right]=\pi\,.\,\frac{128}{3}=133{,}973\ dm^3$$

Objem telesa, ktorý vznikol rotáciou dvoch kriviek je $133{,}973\,dm^3$.

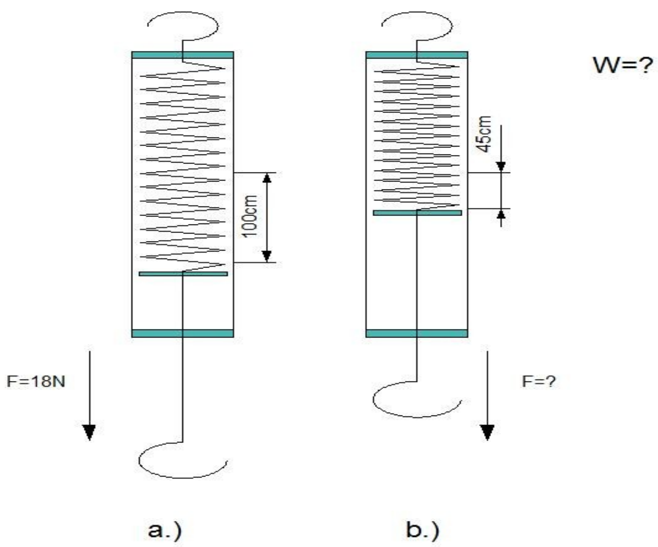
4.2 Fyzikálne aplikačné príklady

Ako sme už videli v predchádzajúcich kapitolách, integrálny počet má široké uplatnenie aj vo fyzike, preto v tejto podkapitole poukážeme na vybrané tipy príkladov.

4.2.1 Príklady na výpočet práce

V tejto podkapitole sa budeme zaoberať dvoma príkladmi kde v prvom sa bude počítať práca a v druhom bude práca daná a budeme počítať silu a predĺženie.

Príklad 1. Akú prácu treba vykonať pri predĺžení pružiny o 45cm z nenapnutého stavu, ak vieme, že sila $F=18\text{N}$, rovnobežná s osou pružiny ju predĺži o 100cm . Pružiny sú znázornené na obrázku (Obr. 17).



Obr. 17 Predlžovanie pružín

Riešenie: V tomto príklade využijeme vzorec (17) na výpočet práce.

Vypíšeme si známe hodnoty:

$F = 18\text{N}$

$x = 100\text{cm} = 1\text{m}$

$a = 0$

$b = 45\text{cm} = 0{,}45\, m$

Sila F je priamoúmerná k predĺženiu x

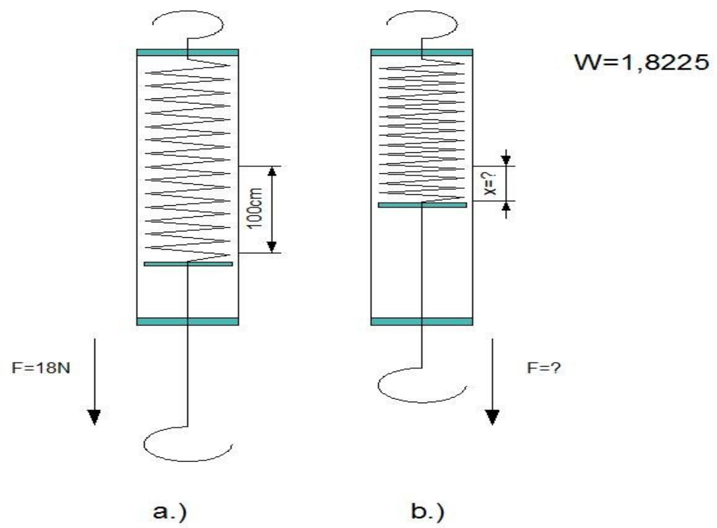
$$F = k.x \Rightarrow k = \frac{F}{x} = \frac{18}{1} = 18\, N$$

$$W = \int_{b}^{a} F dx$$

$$W = \int_{0{,}45}^{0} k.x\, dx = \int_{0{,}45}^{0} 18.\text{x}\, dx = 18.\frac{0{,}45^2}{2} = 1{,}8225\, J$$

Pri predĺžení pružiny o 45cm treba vykonať prácu $W = 1{,}8225\, J$.

Príklad 2. Určte silu F, ktorá sa musela vynaložiť pri predĺžení pružiny z nenapnutého stavu pri vykonanej práci $W = 1{,}8225\, J$. Vypočítajte o koľko sa táto pružina predĺžila, ak viete ,že sila $F = 18\text{N}$, rovnobežná s osou pružiny ju predĺži o 100cm . Pružiny sú znázornené na obrázku (Obr. 18.)



Obr. 18 Predlžovanie pružín

Riešenie: Príklad budeme riešiť pomocou vzorca (17) na výpočet práce

Vypíšeme si známe hodnoty

$W = 1{,}8225\,J$

$F = 18\mathrm{N}$

$x = 100\mathrm{cm} = 1\mathrm{m}$

Sila F je priamoúmerná k predĺženiu x

$$F = k.x \Rightarrow k = \frac{F}{x} = \frac{18}{1} = 18\,N$$

$$W = \int_b^a F dx$$

$$1{,}8225 = \int_a^b 18.\mathrm{x}\, dx$$

$$\frac{1{,}8225}{18} = \int_0^y x\, dx$$

$$\frac{1{,}8225}{18} = \frac{y^2}{2}$$

$$\frac{2.1{,}8225}{18} = y^2$$

$$y = \sqrt{0{,}2025} = 0{,}45\,m$$

$$x = y$$

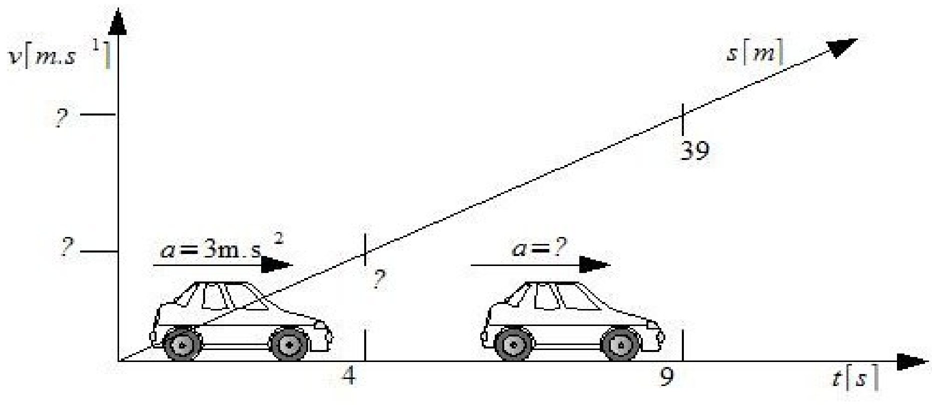
A silu vypočítame ako $F = k.x = 18.0{,}45 = 8{,}1\,N$

Zistili sme ,že tyč sa predĺži pri vykonanej práci $W = 1{,}8225\,J$ o $x = 0{,}45\,m$ pri pôsobiacej sile $F = 8{,}1\,N$.

4.2.2 Príklady na výpočet priamočiareho pohybu so zrýchlením.

Aj v tejto podkapitole budeme riešiť dva príklady. V prvom budeme zisťovať rýchlosť a dráhu ak poznáme čas a zrýchlenie. V druhom budeme počítať rýchlosť a zrýchlenie ak poznáme čas a dráhu.

Príklad 1. Auto sa pohybuje priamočiaro so zrýchlením $a = 3\mathrm{m.s}^{-2}$. Určite rovnicu rýchlostí a rovnicu dráhy ak uvažujeme, že ($v_0 = 0, s_0 = 0$). Vypočítajte rýchlosť a dráhu pohybu v čase $t = 4\mathrm{s}$ .Auto je znázornené na obrázku (Obr. 19).



Obr. 19 Pohybujúce sa automobily

Riešenie: Pri výpočtoch budeme vychádzať z definície priamočiareho zrýchleného pohybu.

Vypíšme si známe hodnoty

$a=3\mathrm{m.s}^{-2}$

$v_o=0$

$s_o=0$

$t=4\mathrm{s}$

Pomocou vzorcov (19) a (20) môžeme vypočítať rýchlosť a dráhu

$$v=\int_0^4 a.dt=a.\int_0^4 dt=a.[t]_0^4=a.(4-0)=3.(4-0)=12\mathrm{m.s}^{-1}$$

$$s=\int_0^4 v.dt=\int_0^4 a.t.dt=a.\int_0^4 t.dt=a.\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^4=a.\left(\frac{4^2}{2}\right)=3.\frac{16}{2}=24\mathrm{m}$$

Rýchlosť auta v čase $t=4\mathrm{s}$ pri zrýchlení $a=3\mathrm{m.s}^{-2}$ je $v=12\mathrm{m.s}^{-1}$ a jeho dráha $s=24\mathrm{m}$.

Príklad 2. Pomocou predchádzajúceho príkladu 1. vypočítajte rýchlosť a zrýchlenie auta od času $t_1=4\mathrm{s}$ ak by v čase $t_2=9\mathrm{s}$ prešlo dráhu $s=39\mathrm{m}$. Auto je znázornené na obrázku (Obr. 19).

Riešenie: Vypíšme si známe hodnoty

$v_o = 12\text{m.s}^{-1}$
$s_o = 24\text{m}$

$t_1 = 4\text{s}$
$t_2 = 9\text{s}$

$s = 39\text{m}$

Podľa vzorcov (19) a (20) môžeme vypočítať rýchlosť a zrýchlenie.

Pomocou neurčitého integrálu môžeme odvodiť:

$$s = \int v.dt = \int (a.t + v)\, dt = \frac{1}{2} a.t^2 + v_0\ .t + s_0$$

Podľa Vety 5. Newtonova – Leibnizova formula môžeme napísať:

$$s = \left[\frac{1}{2} a\,.\,t^2 + v_0\ t + s_o\right]_4^9$$

$$39 = a.\left[\frac{t^2}{2}\right]_4^9 + 12.[t]_4^9 + 24$$

$$39 = a.\left[\frac{9^2 - 4^2}{2}\right] + 12.[9 - 4] + 24$$

$$39 = a.\frac{65}{2} + 60 + 24$$

$$a = -1{,}3846\, m.s^{-2}$$

Pretože zrýchlenie má hodnotu $a > 0$ ide o rovnomerne spomalený pohyb.

$$v = \int_4^9 a.dt = [a.t + v_0]_4^9$$

$$v = [-1{,}3846.(9-4) + 12]$$

$$v = 5{,}077\, m.s^{-1}$$

Auto ma pri čase $t_2 = 9\text{s}$ a dráhe $s = 39\text{m}$ rýchlosť $v = 5{,}077\, m.s^{-1}$ a zrýchlenie $a = -1{,}3846\, m.s^{-2}$, teda ide o rovnomerne spomalený pohyb.

5. Návrh na využitie výsledkov

Integrálny počet patrí medzi najpoužívanejšie matematické nástroje. Jeho aplikácie môžeme vidieť v ekonomike, v technických odboroch ako sú fyzika, elektrotechnika, mechanika a ďalšie.

Medzi aplikácie integrálneho počtu patrí:

- hľadanie obsahu rovinného útvaru
- výpočet objemu rotačného telesa
- úlohy na výpočet práce
- príklady na priamočiary zrýchlený pohyb
- výpočet ťažiska objektu
- a iné aplikácie.

Z pedagogického hľadiska nachádzame široké uplatnenie predkladanej práce pre vyučujúcich na vysokých školách zaoberajúcich sa matematikou alebo technickými odbormi. Táto práca môže slúžiť aj študentom pre ľahšie objasnenie a zvládnutie integrálneho počtu v jednoduchých geometrických úlohách pri hľadaní obsahu rovinného útvaru alebo priamo v technických aplikáciách ako je napríklad určovanie rýchlosti automobilu. Taktiež práca môže slúžiť ako pomôcka pri vypracovávaní referátov, seminárnych prác alebo ako doplnková literatúra na prijímacie skúšky na vysoké školy.

Záver

Integrálny počet je jeden s najpoužívanejších matematických nástrojov. S aplikáciami integrálneho počtu sa môžeme stretnúť v rôznych vedných oboroch ako matematika, ekonomika, technika.

Cieľom bakalárskej práce bolo poukázať na možnosti aplikácie matematických poznatkov z oblasti integrálneho počtu v technickej praxi a vytvoriť materiál, ktorý by mohli vyučujúci použiť ako doplnkové pomôcky pri detailnejšom vysvetľovaní spomínanej problematiky. Vďaka grafickým výstupom je práca prehľadná a názorná. V kapitolách venovaným definíciám a spôsobom výpočtu integrálu sa nachádzajú riešené príklady, ktoré napomáhajú k lepšiemu pochopeniu a osvojeniu si danej problematiky. Uvedené aplikačné príklady z technických disciplín popisujú reálne situácie s akými sa stretávame v bežnom živote, čo vedie k lepšej predstave danej úlohy a následne k ľahšiemu sa dopracovaniu k výsledku. Všetky definície a vzorce potrebné k výpočtom predkladaných úloh sa nachádzajú v prvej kapitole práce, tieto definície a vzorce výrazne zjednodušujú ich riešenie, pretože nieje potrebná žiadna iná literatúra s danou problematikou. V prílohe prikladám základnú tabuľku a vzorce z pružnosti a pevnosti.

Podrobnejšie štúdium zvolenej problematiky nám umožnilo aplikovať matematické úlohy integrálneho počtu aj do technických aplikácií. A výsledkom tohto štúdia je zhodnotenie využitia integrálneho počtu a jeho osobitého prínosu do technickej praxi. Môžeme konštatovať, že ciele práce boli splnené.

Zoznam použitej literatúry

Knižné publikácie:

CAJORI, F. 1991. *History of mathematics.* 5. vyd. New York: Chelsea Publishing Company, 1991. 530 s. ISBN 0-8284-1303-7.

FECENKO, J.– PINDA, Ľ. 2002. *Matematika 1. 2.* vyd. Bratislava: IURA EDITION, 2002. 316 s. ISBN 80-89047-44-0.

FECENKO, J.– PINDA, Ľ. – PELLER, F. 2000. *Matematika 3.* 1.vyd. Bratislava: IURA EDITION, 2000. 221 s. ISBN 80- 88715-97-0.

FEŤKOVÁ, J. a i. 2000. *Integrálny počet a jeho aplikácie.* 1.vyd Žilina: EDIS Vydavaťelstvo ŽU, 2000. 240 s. ISBN 80-7100-668-8.

HARSHBARGER, R. J. – REYNOLDS, J. J. 1990. *Calculus with Aplications.* 1.vyd. Toronto: d.c. Heath and Company, 1990. 595 s. ISBN 0-669-21145-1.

HAJKO, V. a i. 1983. *Fyzika v príkladoch.* 5.vyd. Bratislava: Alfa, 1983. 592 s.

KUČERA, Marián. *Technická mechanika-statika.* 1. vyd. Nitra: SPU, 2008. 142 s. ISBN 978-80-552-0003-3.

MATEJDES, Milan. 2005. *Aplikovaná matematika.* 1. vyd. Zvolen: Matcentrum, 2005. 556 s. ISBN 80-89077-01-3.

ORSZÁGHOVÁ, Dana a i. 2008. *Matematika a jej aplikácie.* 1. vyd. Nitra: SPU, 2008. 343 s. ISBN 978-80-552-0126-9.

ORSZÁGHOVÁ, Dana a i. 2006. *Cvičenia z matematiky.* 2. vyd. Nitra: SPU, 2006. 206 s. ISBN 80-8069-778-7.

ORSZÁGHOVÁ, Dana a i. 2002. *Matematika 1.* 1. vyd. Nitra: SPU, 2002. 337 s. ISBN 80-7137-985-9.

RÉDL, Jozef. *Pružnosť a pevnosť.* 1. vyd. Nitra: SPU, 2009. 106 s. ISBN 978-80-552-0213-6.

ŠESTÁK, Jozef a i. 1985. *Technická mechanika-mechanika tuhých telies* 1. vyd. Bratislava: Príroda, 1985. 564 s.

Internetové zdroje:

BABJAK, Viktor. *1. Kinematika hmotného bodu.* [online] Publikované 13.03.2004. [citované 20.04.2010]. Dostupné z: <http://www.glsfyzika.szm.com/Maturita/01a.doc>.

BARANÍKOVÁ, Helena. *Určitý integrál.* [online] Publikované 23.09.2003.[citované 29.03.2010]. Dostupné z: <http://www.fem.uniag.sk/km/Uintegral.doc>.

BELAN, Anton. Práca. *Riešené úlohy z matematiky 2* [online] November, 2000. [aktualizované Marec 2010], [citované 18.03.2010]. Dostupné z: <http://www.math.sk/skripta2/node72.html>

BELAN, Anton. Tlaková sila. *Riešené úlohy z matematiky 2* [online] November, 2000. [aktualizované Marec 2010], [citované 18.03.2010]. Dostupné z: <http://www.math.sk/skripta2/node73.html>

KUTIŠ, Vladimír – MURÍN, Justín. *Mechanika, termodynamika a hydromechanika - Návody na cvičenia (vybrané kapitoly)* [online] Publikované s.a. [citované 07.04.2010]. Dostupné z: <http://aladin.elf.stuba.sk/Katedry/KMECH/slovakversion/person/kutis/Mechanika_cvika.pdf>

POKORNÝ, Milan. – HÍC, Pavel. Určitý integrál. *Matematika pre informatikou a prírodné vedy* [online] Máj, 2007. [aktualizované s.a.], [citované 04.09.2009]. Dostupné z: <http://pdfweb.truni.sk/pokorny/mpi/index.htm>