SLOVENSKÁ POĽNOHOSPODÁRSKA UNIVERZITA

V NITRE

FAKULTA EKONOMIKY A MANAŽMENTU

1130168

POROVNANIE RÔZNYCH TYPOV ÚROKOVANIA Z GRAFICKÉHO HĽADISKA

2011 **Jaroslava Hurňáková**

SLOVENSKÁ POĽNOHOSPODÁRSKA UNIVERZITA

V NITRE

FAKULTA EKONOMIKY A MANAŽMENTU

POROVNANIE RÔZNYCH TYPOV ÚROKOVANIA Z GRAFICKÉHO HĽADISKA

Bakalárska práca

Študijný program:	Manažment podniku
Študijný odbor:	Ekonomika a manažment podniku (6284700)
Školiace pracovisko:	Katedra matematiky
Školiteľ:	Mgr. Radomíra Gregáňová, PhD.

Nitra 2011 **Jaroslava Hurňáková**

Čestné vyhlásenie

Podpísaná Jaroslava Hurňáková vyhlasujem, že som záverečnú prácu na tému „Porovnanie rôznych typov úrokovania z grafického hľadiska“ vypracovala samostatne s použitím uvedenej literatúry.

Som si vedomý zákonných dôsledkov v prípade, ak uvedené údaje nie sú pravdivé.

V Nitre 10. mája 2011

Jaroslava Hurňáková

Poďakovanie

Touto cestou vyslovujem poďakovanie Mgr. Radomíre Gregáňovej, PhD. za pomoc, odborné vedenie, cenné rady a pripomienky pri vypracovaní mojej bakalárskej práce.

V Nitre 10. mája 2011

Jaroslava Hurňáková

Abstrakt

Cieľom bakalárskej práce je na základe preštudovanej literatúry klasifikovať rôzne typy úrokovania a graficky ich porovnať. Práca je rozdelená do 5 kapitol. Obsahuje 17 obrázkov a 10 tabuliek. Na základe modelového príkladu sme si graficky znázornili konečné hodnoty kapitálu pri rôznych úrokových mierach. Zaoberali sme sa hlavne jednoduchým a zloženým úrokovaním. Pri jednoduchom úrokovaní sme využili lineárnu funkciu a pri zloženom úrokovaní sme využili exponenciálnu funkciu. Na základe vzorcov, ktoré uvádzajú viacerí autori, sme si vypočítali konečnú hodnotu kapitálu pre jednoduché a zložené úrokovanie ako aj rozdiel medzi nimi. Vypočítané hodnoty sme si zapísali do tabuliek. Na základe vytvorených grafov sme si overili, že ak je doba úrokovania kratšia ako úrokové obdobie, je lepšie kapitál úročiť jednoduchým úrokovaním. Zložené úrokovanie využívame vtedy, ak je doba úrokovania dlhšia ako úrokové obdobie.

Abstract

The purpose of this bachelor work is based on researched literature to classify various types of interest rates and their graphic comparison. The work is divided into the five capitols. It contains seventeen pictures and ten tables. Based on model example we graphically demonstrated final values of capital in various interest rates. We mainly dealt with simple and compound interests. With the simple interest we used linear function and with the compound interest we used exponential function. Based on formulas stated by several authors, we calculated final value of capital for simple and compound interest and also the difference between simple and compound interest. We recorded the calculated values into the tables. Based on created graphs we verify that if the period of interest rates is shorter then interest rates term it is better to pay interest rate to capital by simple interest. We use compound interest if the period of interest rates is longer then the interest rate term.

Obsah

Zoznam ilustrácií

Zoznam tabuliek

Zoznam skratiek a značiek

a pod.	a podobne
p.a.	per annum
tzv.	takzvané
a i.	a iné
K_0	začiatočná hodnota kapizálu
n	doba úrokovania vyjadrená v rokoch
i	úroková sadzba
p	úroková miera
t.j.	to je
K_n	konečná hodnota kapitálu
t_1	počet dní do konca prvého roka
t_2	počet dní v poslednom roku
N	počet celých rokov
δ	úroková sadzba spojitého úrokovania
f	funkcia f
$f(x)$	funkcia f premennej x
$x \in M$	x je prvkom množiny M
$x \in R$	x patrí množine reálnych čísel
$D(f), D_f$	definičný obor funkcie f
$H(f)$	obor hodnôt funkcie f
$\exists$	existuje
$F(x,y)=0$	implicitný tvar funkcie
$M \subset D(f)$	množina M je podmnožinou definičného oboru
$f(x_1)$	funkčná hodnota v bode x_1
$f(x_2)$	funkčná hodnota v bode x_2
p.j.	peňažná jednotka
resp.	respektíve

Úvod

V mnohých sférach ľudskej aktivity, najmä vo finančníctve, bankovníctve a poisťovníctve, treba robiť rozhodnutia týkajúce sa vloženia kapitálu, finančných tokov, výhodnosti uzatvárania zmlúv, pôžičiek, obchodovania s cennými papiermi a pod. Kvalitatívnym nástrojom používaným na kvalifikované rozhodovanie sú metódy finančnej matematiky. Ich poznanie umožňuje používať finančné prostriedky racionálnym a účinným spôsobom.

Témou bakalárskej práce je porovnanie rôznych typov úrokovania z grafického hľadiska. Ako už z názvu vyplýva, budeme sa v nej zaoberať grafickým znázornením úrokovania. V našom prípade budeme znázorňovať pomocou grafov jednoduché a zložené úrokovanie pri rôznych úrokových obdobiach a úrokových mierach.

V práci využívame rôzne metódy finančnej matematiky, číselné výpočty a grafy, ktoré znázorňujú rôzne prípady, ktoré spôsobujú prírastok konečnej hodnoty kapitálu. Porovnanie rôznych typov úrokovania z grafického hľadiska nám lepšie objasňuje a zobrazuje, ktorý typ úrokovania je pre zákazníka za určitých podmienok priaznivejší. Inak povedané, pomáha zákazníkovi si vybrať, ktorý spôsob má uprednostniť, ak sa chce rozhodnúť využívať bankové produkty, aby čo najlepšie zhodnotil svoj vložený kapitál.

Časť finančnej matematiky sa zaoberá aj úrokovaním. Základné rozdelenie pre výpočet úroku je jednoduché a zložené úrokovanie. Úrok je príjem plynúci z kapitálu, je základnou formou výnosu z kapitálu. Je to cena za získanie peňazí niekoho druhého. Túto sumu musí zaplatiť dlžník veriteľovi. Úrok je daný úrokovou mierou, ktorá vyjadruje pomer úroku a veľkosti kapitálu. Úroková miera sa vytvára na trhu kapitálu ako výsledok vzájomného vzťahu dopytu po financovaní a ponukou financovania. Existencia úroku sa dá vysvetliť časovou preferenciou a existenciou rizika. Tomáš Akvinský vysvetlil úrok ako cenu času. Keďže však „čas patrí Bohu", považoval vyberanie úroku za nesprávne.

Teória finančnej matematiky bola v minulosti založená na používaní finančných tabuliek. V súčasnosti však výpočtová technika umožňuje hlavne urýchliť výpočty spojené s finančnými funkciami. Preto sme sa v tejto práci rozhodli používať na výpočty, tvorbu grafov a tabuliek programový systém Excel, pretože je to v súčasnosti najpoužívanejší tabuľkový procesor.

Na modelovom príklade v práci realizujeme výpočty pomocou tabuliek a grafické znázornenia jednotlivých prípadov, kde venujeme pozornosť konečnej hodnote kapitálu. Pozorujeme ako sa mení krivka lineárnej a exponenciálnej funkcie pri rôznych situáciách, ktoré sú znázornené na grafoch. Krivka resp. priamka lineárnej funkcie nám znázorňuje grafické stvárnenie konečných hodnôt kapitálu pre jednoduché úrokovanie a krivka exponenciálnej funkcie nám znázorňuje grafické stvárnenie konečných hodnôt kapitálu pre zložené úrokovanie.

Na základe týchto porovnaní sa budeme vedieť optimálne rozhodnúť, ktorý typ úrokovania si vybrať, aby sme svoj vložený kapitál čo najefektívnejšie zhodnotili .

1 Prehľad o súčasnom stave riešenej problematiky

1.1 Úrokovanie a úroková miera

1.1.1 Úrok a úroková miera

Ak veriteľ poskytne určitú sumu dlžníkovi na dočasné používanie, tak dlžník za právo používať tieto požičané peniaze platí veriteľovi určitý poplatok (odmenu). Peňažnú sumu, ktorú poskytuje veriteľ dlžníkovi za určitý poplatok, nazývame kapitál (istina). Poplatok, ktorý platí dlžník veriteľovi za používanie jeho peňazí, sa nazýva úrok, definujú HUŤKA, Vladimír – PELLER, František (2010). Veriteľom, ale aj dlžníkom, môže byť právnická alebo fyzická osoba (občan, spoločnosť, banka). Napríklad veriteľom môže byť občan, ak si uloží svoje peniaze do banky, ktorá je v tomto prípade dlžníkom a za uložené peniaze platí občanovi úroky z vkladu. Veriteľom však môže byť aj banka, ktorá poskytla úver (pôžičku) podniku, za čo dostáva úrok.

Úrok je čiastka, ktorú musí dlžník zaplatiť veriteľovi za poskytnutý úver, definuje NĚMEC, Vladimír (1995). O túto čiastku dostane veriteľ od dlžníka viac, než mu požičal.

RADOVÁ, Jarmila – DVOŘÁK, Peter – MÁLEK, Jiří (2009) tvrdia, že ak požičia jeden subjekt druhému peňažné prostriedky, bude požadovať odmenu ako náhradu za dočasnú stratu kapitálu, za riziko spojené so zmenami tohto kapitálu (s infláciou) a za neistotu, že kapitál nebude splatený v danej lehote a výške. Táto odmena sa nazýva úrok. Veriteľ vtedy získava úrok za to, že dočasne poskytol svoje peniaze niekomu inému. Naopak z pohľadu dlžníka je úrok cena, ktorú platí za získanie úveru.

KOŠČO, Tibor (2004) píše, že úrok je platbou spojenou s úverovým vzťahom. Platí ho dlžník za obdobie trvania dlhu. Charakterizuje sa spravidla ako cena používania peňazí. Výška úroku sa stanovuje percentuálnou sadzbou – úrokovou mierou zo sumy dlhu.

Úrok je platba za použitie fondov, konštatujú SAMUELSON, Paul A. – NORDHAUS William D. (1992). Úroková miera je suma úroku platená za jednotku času. Inými slovami, ako odmenu za možnosť vypožičiavania fondov musia ľudia zaplatiť určitú ročnú sumu. Úrokovú mieru predstavujú náklady na vypožičiavanie fondov, ktoré sa merajú ročne v dolároch ja jeden vypožičaný dolár.

Ďalej uvádzajú že úroková miera je vlastne cena kapitálu a kapitál predstavuje rast budúcej spotreby na úkor súčasnej spotreby, potom úroková miera sa meria ako zisk vyjadrený v dolároch na jeden dolár za jednotku času.

Tiež definujú úrok ako nástroj, ktorý plní v ekonómii dve funkcie. Na jednej strane ako motivujúci nástroj je stimul pre ľudí, aby sporili a hromadili bohatstvo. Na druhej strane ako nástroj alokácie kapitálu úrok dovoľuje spoločnosti vybrať len tie investičné projekty, ktoré dosahujú najvyššiu mieru výnosu.

Úrok je svojou formou cenou kapitálu ako tovaru, avšak „iracionálnou formou ceny" uvádza GALLO, Pavol (1995). Nie je vyjadrením požičanej kapitálovej hodnoty, ale poplatkom za používanie pôžičkového kapitálu, a teda nie je zaplatením hodnoty, ale úžitkovej hodnoty kapitálu ako tovaru, t.j. schopnosti prinášať zisk.

Ďalej tiež konštatuje, že úrok teda navonok vystupuje ako cena kapitálu, v podstate je však osobitnou formou jeho výnosu – zisku. Zisk, ktorý plynie z používania pôžičkového kapitálu, sa delí na dve častí: úrok a podnikateľský zisk. Úroková miera ako pomer úroku k pôžičkovému kapitálu je časťou miery zisku. Miera zisku podnikov sa vyjadruje pomerom zisku k vlastnému kapitálu.

Všeobecný názov poplatku za dočasné poskytnutie voľných peňažných prostriedkov sa nazýva úrok, definuje SKŘIVÁNKOVÁ, V. – SKŘIVÁNEK, J. (2006). Výška úroku v danom ekonomickom prostredí závisí od :

- veľkosti požičanej sumy – istiny,
- časového obdobia pôžičky – doby splatnosti,
- rizika návratnosti,
- likvidity.

Pomerná časť z požičanej sumy sa nazýva úroková sadzba (úroková miera) a banky ju vyjadrujú v percentách. Úrokovanie je spôsob výpočtu úroku alebo určenie budúcej hodnoty istiny ako funkcie súčasnej hodnoty a doby splatnosti.

Úrok podľa ŠENKÝŘOVEJ, Bohuslavy a i. (1997) sa chápe ako cena za poskytnutie kapitálu, ktorú platí vypožičiavateľ (dlžník) požičiavateľovi (veriteľovi). Niekedy sa uvádza charakteristika úroku ako cena peňazí.

HUŤKA, Vladimír – PELLER, František uvádzajú vo svojich odborných vydaniach, že veľkosť úroku sa určuje ako percentová časť istiny za úrokové obdobie. Obdobie za ktoré percentová miera určuje úrok ako časť kapitálu, sa nazýva úroková perióda. Percentová miera, zodpovedajúca určenej úrokovej perióde, sa nazýva úroková miera. Pri konkrétnych výpočtoch sa úroková miera vyjadruje v tvare desatinného čísla. Takto vyjadrená úroková miera sa nazýva úroková sadzba.

Ďalej tvrdia to, že úroková perióda môže byť ročná, polročná, štvrťročná, mesačná, týždenná. Podľa toho sa hovorí o zodpovedajúcej úrokovej miere ročnej, polročnej, štvrťročnej, mesačnej, týždennej. V medzinárodnom označení sa používajú nasledovné zápisy:

ročná – per annum, p.a.

polročná – per semestrem, p.s.

štvrťročná – per quartalem, p.q.

mesačná – per mensem, p.m.

týždenná – per septimanam, p.sept.

Podľa CIPRU, Tomáša (2005) úrokové miery patria k dôležitým ekonomickým ukazovateľom podľa. Veľkosť úrokovej miery závisí od mnohých faktorov.

1) Diskontná sadzba je úroková miera, za ktorú poskytuje centrálna banka úvery ostatným bankám. Zvýšenie diskontnej sadzby priamoúmerne vplýva na úrokové miery nie len v komerčných bankách, ale na celom finančnom trhu. Ako nástroj monetárnej politiky má podstatný vplyv na peňažnú masu a následne na infláciu a hospodársky vývoj.

2) Medzibankové úrokové miery sú úrokové miery, ktoré využívajú obchodné banky pri poskytovaní krátkodobých úverov navzájom medzi sebou. Hodnota sa mení každý deň.
3) Stratégia banky je založená na základnej úrokovej miere, ktorú si banka zvolí a od ktorej sa následne odvodzujú úrokové miery ostatných produktov banky. Cieľom väčšiny bánk je samozrejme zisk, takže sa zameriavajú hlavne na veľkosť úrokovej marže, čiže rozdielu medzi úrokovou mierou úverov a vkladov.
4) Riziko pôžičky vzťah s úrokovou mierou je zákonite priamo úmerný. Preto majú štátne cenné papiere nízku výnosnosť. Na druhej strane obchodné a bankové úvery majú vyššie úrokové miery.
5) Doba pôžičky zohľadňuje sa hlavne pri termínovaných vkladoch, kde sú klienti odmenený vyššou úrokovou mierou, za relatívne nižšiu likviditu.
6) Výška požičaného kapitálu úrokové miery sa správajú podobne ako progresívne zdanenie. Čím je množstvo zapožičaného kapitálu väčšie, tým vyššia je aj úroková miera. Pre rozličné výšky úverov majú banky interne stanovené rozličné úrokové pásma.
7) Daňová politika štátu finančné rozhodovanie sa obvykle riadi až čistými výnosmi a čistými cenami úveru po zdanení. Pri niektorých finančných inštrumentoch je zdanenie nulové, ale väčšina kapitálového majetku je zdaňovaná 15% zrážkovou daňou pri zdroji.

Jednoduché úročenie podľa SERENČÉŠA, Petra (2006) sa používa na peňažnom trhu pri operáciách so splatnosťou do jedného roka. Zložené úročenie je proces pravidelného zhodnocovania kapitálu nemennou mierou výnosu – úrokovou mierou, pri ktorom sa v každom období úrok reinvestuje a zvyšuje tak základ na úročenie v ďalšom období.

Podľa NĚMCA, Vladimíra (1995) veľkosť úroku závisí:

1) od veľkosti požičaného kapitálu K_0 (čím väčšia pôžička, tým väčší úrok),
2) od času *t,* daného počtu *n* rokov, po nich musí dlžník pôžičku vrátiť i s úrokom,
3) na úrokovej miere *i,* daná percentom úrokovej sadzby $p : i = \frac{p}{100}$,

4) od úrokového obdobia, t.j. na od periodického intervalu, v ktorom sa úrok platí, v súčasnosti sa používa prevažne ročné úrokové obdobie, označované p.a. (per annum),
5) od použitého spôsobu úrokovania:
    a. pri jednoduchom úrokovaní sa úrok v každom úrokovacom období počíta z pôvodnej istiny (kapitálu),
    b. pri zložitom úrokovaní sa počíta úrok tiež z dlžných úrokov.

Pri úrokovaní hrá významnú úlohu ako úroková sadzba, tak aj úrokovacia doba, t.j. doba, za ktorú dlžník veriteľovi platí zjednaný (alebo stanovený) úrok. Úroková sadzba je spravidla stanovená v percentách, t.j. udáva, o koľko percent sa zvýši kapitál uložený po dobu jedného roka, uvádza ŠENKÝŘOVÁ, Bohuslava a i. (1997).

Základnými pojmami sú úroková sadzba, niekedy sa stotožňujú termíny úroková miera, a úrokovacie obdobie. Úrokovacie obdobie je spravidla jeden rok, (p.a. – per anum). Preto väčšina úrokových sadzieb býva stanovená vo vzťahu k tomuto období, vtedy sú to úrokové sadzby p.a.

V bankovníctve sa však veľmi často pri stanovení úrokových výnosov používa okrem normálneho „kalendárneho" roku (ktorý má 365 dní a jeho mesiace majú buď 28 (29), 30, alebo 31 dní), ktorý sa označuje termínom presný rok, ešte tzv. bežného roku, ktorý ma 360 dní rozdelených do 12 mesiacov (bežných) po tridsiatich dňoch. Preto je nutne si vždy v každom konkrétnom prípade ujasniť, či je východiskovým údajom pre úrokovanie presný alebo bežný rok.

1.1.2 Spôsob úročenia úveru

Úroková sadzba môže byť v úverovej zmluve stanovená nasledujúcimi spôsobmi (REVENDA, Zbyněk, 2005):

Fixná (pevná) úroková sadzba je fixná po celú dobu splatnosti úveru.

Pohyblivá úroková sadzba sa mení počas splatnosti úveru. Spôsob zmien úrokových sadzieb môže byť nasledovná:

a) Bezprostredná väzba na určitú úrokovú sadzbu tak, že ku zmenám úrokovej sadzby z úveru dochádza súčasne so zmenou sadzby, na ktorú je viazaná. Takto koncipovaná úroková sadzba býva niekedy označovaná ako floating rate.

b) Väzba na vybranú trhovú úrokovú sadzbu s dopredu danými termínami prispôsobovania. Úroková sadzba z úveru sa mení v pravidelných intervaloch a prispôsobuje sa vyššej referenčnej sadzbe platnej na počiatku dohodnutého intervalu. Referenčnými sadzbami sú obvykle trhové úrokové sadzby typu LIBOR, PIBOR, FIBOR, PRIBOR, BRIBOR (ide o úrokové sadzby určované ako priemerné úrokové sadzby z medzibankového trhu v Londýne, Paríži, Frankfurtu ,Prahe či v Bratislave).

c) Za pohyblivý spôsob úrokovania možno označiť i spôsob, kedy banka síce dohodne pevnú úrokovú sadzbu, avšak si vyhradí právo ju upravovať (oboma smermi) behom doby splatnosti, pokiaľ dôjde k výraznejším zmenám v trhových úrokových sadzbách.

1.1.3 Úrokovanie

Proces spojený s výpočtom úrokov nazývame úrokovaním, píše HUŤKA, Vladimír – PELLER, František (2010). Ak pri výpočte úroku sa úrok v každej úrokovej perióde určuje z konštantného začiatočného kapitálu, inak povedané sa počíta úrok za časť úrokovej periódy, hovoríme o **jednoduchom úrokovaní**, ak sa úrok v každej úrokovej perióde počíta z kapitálu zväčšeného o úroky z predchádzajúceho obdobia, hovoríme o **zloženom úrokovaní**.

Podľa splatnosti úroku hovoríme :

1) o **dekurzívnom (polehotnom) úrokovaní**, ak je úrok splatný na konci úrokovej periódy;
2) o **anticipatívnom (predlehotnom) úrokovaní**, ak je úrok splatný na začiatku úrokovej periódy.

1.1.4 Ponímanie času vo finančnej matematike

Ak obdobie, za ktoré sa počíta úrok, je určené v dňoch, na výpočet veličiny n môžeme použiť dve metódy, podľa toho, aký základ zoberieme za celkový počet dní roka:

Ordinálna (banková) metóda $n = t/360$, t = počet dní

Presná (exaktná) metóda $n = t/365$, t = počet dní

Doba úrokovania sa stanovuje podľa tzv. štandardov. HUŤKA, Vladimír – PELLER, František (2010), CIPRA Tomáš (2006) a iní uvádzajú v bankovej praxi týchto päť najpoužívanejších štandardov:

1) *Štandard 30E/360,* v ktorom má rok 360 dní a každý mesiac má 30 dní, pričom prvý deň sa do úrokového obdobia nezapočítava, ale posledný deň áno. Táto metóda výpočtu dĺžky úrokového obdobia sa nazýva *európska* alebo *nemecká metóda.*
2) *Štandard ATC/360,* v ktorom má rok 360 dní a počet dní sa používa podľa aktuálneho kalendára. Táto metóda výpočtu dĺžky úrokového obdobia sa nazýva *medzinárodná* alebo *francúzska metóda.*
3) *Štandard ATC/365,* v ktorom má rok 365 dní (prestupný rok 366 dní) a počet dní sa používa podľa aktuálneho kalendára. Táto metóda výpočtu dĺžky úrokového obdobia sa nazýva *anglická metóda*.
4) *Americký štandard* (štandard 30A/360) sa líši od štandardu európskeho (30E/360) iba v prípade, keď D_1 nie je 30 ani 31 a zároveň D_2=31. V tomto prípade sa ponecháva 31 dní.
5) *ACT/ACT* používa skutočný počet dní v mesiaci a skutočný počet dní v roku.

1.1.5 Reálne a nominálne úrokové miery

MANKIW N. Gregory (1999) píše, že úprava ekonomických veličín o infláciu je zvlášť dôležitá pri práci s úrokovou mierou. Ak si uložíme peniaze do banky, dostaneme za svoje depozitá dohodnutý úrok. Naopak, ak si požičiame, musíme dohodnutý úrok zaplatiť. Úrok predstavuje platbu v budúcnosti za súčasné poskytnutie peňazí. Je tak jasné, že sa musíme zaujímať o cenu peňazí, pretože tá je dnes spravidla iná, ako bola v minulosti. Úroková miera platená v banke sa nazýva nominálna úroková miera, keď ju očistíme od inflácie, dostaneme reálnu úrokovú mieru.

Vzťah medzi reálnou a nominálnou úrokovou mierou môžeme zapísať:

reálna úroková miera = nominálna úroková miera – miera inflácie.

Reálna úroková miera je teda rozdiel medzi nominálnou (bežne uvedenou) úrokovou mierou a infláciou. Nominálna úroková miera určuje, koľko za svoj vklad v banke dostaneme, reálna úroková miera oznamuje, ako rýchlo sa zvyšuje kúpna sila nášho bankového účtu.

1.1.6 Jednoduché úrokovanie

Pri jednoduchom úrokovaní počítame úrok vždy zo začiatočnej hodnoty kapitálu *K_0*, bez ohľadu na to, či úrokové obdobie, za ktoré sa počíta úrok, je menšie alebo väčšie ako úroková perióda. V praxi, pri bankových a iných finančných operáciách sa však jednoduchý úrok počíta predovšetkým vtedy, keď čas, za ktorý sa počíta úrok, je menší ako úroková perióda. Obyčajne sa za úrokovú periódu považuje jeden rok, uvádza HUŤKA, Vladimír – PELLER, František (2010).

Pri jednoduchom úrokovaní úrok u z istiny K_0 pri úrokovej sadzbe i za n úrokových periód je

$$u = K_0 \cdot i \cdot n \tag{1}$$

resp. ak namiesto i použijeme p

$$u = \frac{K_0 \cdot p \cdot n}{100} \tag{2}$$

Začiatočná hodnota kapitálu (tiež prítomná, súčasná hodnota) K_0 pri danej úrokovej sadzbe i a pri dĺžke úrokového obdobia n prinesie podľa vzorca (1) úrok $u = K_0 \cdot i \cdot n$. Ak úrok pripočítame k začiatočnej hodnote K_0, dostaneme veličinu $K_n = K_0 + u$, ktorá určuje konečnú hodnotu kapitálu po n úrokových periódach (n nemusí byť celé číslo, obyčajne je to číslo menšie ako 1). Túto veličinu nazývame budúcou hodnotou (tiež výslednou, konečnou hodnotou), resp. hodnotou kapitálu pre n úrokových periód. Dostávame

$$K_n = K_0 + u = K_0 + K_0 \cdot i \cdot n = K_0 \cdot (1 + i \cdot n)$$

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i \cdot n) \tag{3}$$

Teraz budeme uvažovať prípad, keď dochádza nielen k vkladom, ale aj výberom (i keď každý výber možno považovať za vklad s mínusovým znamienkom), teda k výpočtom úrokov na bežných účtoch. Používajú sa dve metódy:

1) *Zostatková (anglická) metóda*. Vypočíta sa úrok vždy za počet dní, v ktorých sa vklad nemenil, na konci obdobia sa jednotlivé úroky sčítajú.

2) *Postupná (nemecká) metóda*. Od každej zmeny účtu sa vypočíta úrokové číslo do konca obdobia, pričom vklady sa berú so znamienkom +, výbery so znamienkom **-** . Potom sa súčet úrokových čísiel vydelí úrokovým deliteľom.

1.1.7 Zložené úrokovanie

Podľa HUŤKU Vladimíra – PELLERA Františka (2010) pri jednoduchom úrokovaní počítame úrok vždy zo začiatočného kapitálu, istiny K_n . Používame ho najmä vtedy, ak doba, za ktorú sa počíta úrok, je menšia ako úroková perióda, pre ktorú je stanovená úroková miera (resp. úroková sadzba). Ak však doba, za ktorú počítame úrok, je dlhšia ako úroková perióda, tak vtedy obvykle úroky pripisujeme k istine na konci úrokovej periódy a v nasledujúcom období túto sumu zúročíme. Hovoríme o „ úrokovaní úrokov", resp. o zloženom úrokovaní.

Zistíme, aký bude nárast kapitálu po n úrokových periódach:

Kapitál na začiatku 1. periódy K_0

Kapitál na konci 1. periódy $K_1 = K_0 + u = K_0 + K_0 \cdot i = K_0 \cdot (1+i)$

Kapitál na konci 2. periódy $K_2 = K_1 + K_1 \cdot i = K_1 \cdot (1+i) = K \quad \cdot (1+i)^2$

...

Kapitál na konci *n*-tej periódy $K_n = K_0 \cdot (1+i)^n$

Veličinu K_n , podobne ako pri jednoduchom úrokovaní, nazývame budúcou (tiež výslednou, konečnou) hodnotou, veličinu K_0 prítomnou (tiež súčasnou, začiatočnou) hodnotou.

Pre výpočet konečnej hodnoty platí vzťah

$$K_n = K_0 \cdot (1+i)^n \tag{4}$$

1.1.7.1 Zložené úrokovanie – úrokovacie obdobie je menšie ako jeden rok

Úrokovanie vychádza z toho, že vyplatené úroky sa pripočítavajú k pôvodnému kapitálu a v nasledujúcom úrokovacom období (≤ rok) sa spolu s ním úročia. Pre koncovú (budúcu) hodnotu kapitálu platí nasledovný vzťah

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot n} \qquad (5)$$

kde m je počet častí roka, za ktoré sa počíta úrok, t.j. počet ročných konverzií.

1.1.8 Vzťah medzi jednoduchým a zloženým úrokovaním

Teraz sa budeme zaoberať vzťahom medzi jednoduchým a zloženým úrokovaním. Nárast začiatočného kapitálu K_0 pri jednoduchom úrokovaní je určený vzorcom $K_n = K_0 \cdot (1 + i \cdot n)$ a pri zloženom úrokovaní vzorcom $K_n = K_0 \cdot (1+i)^n$. Pri jednoduchom úrokovaní je teda K_n lineárnou funkciou n, grafom je priamka, a pri zloženom úrokovaní exponenciálnou funkciou n, grafom je exponenciálna krivka. Pretože pre $n = 1$ je v oboch prípadoch , grafy oboch funkcií prechádzajú bodmi (0; K_0) a [1; $K_0 \cdot (1 + i)$] (Obr. 1). Tento vzťah uvádza HUŤKA, Vladimír – INSTITORIS, Juraj – MOJŽIŠOVÁ, Elena. (1997).

Položíme $K_0 = 1$ a porovnajme úrokovacie faktory $(1 + i \cdot n)$ a $(1+i)^n$ pre jednoduché a zložené úrokovanie. Vyjadríme $(1+i)^n$ pomocou binomického vzorca:

$$(1+i)^n = 1 + n \cdot i + \frac{n \cdot (n-1)}{2!} \cdot i^2 + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!} \cdot i^3 + \ldots + i^n$$

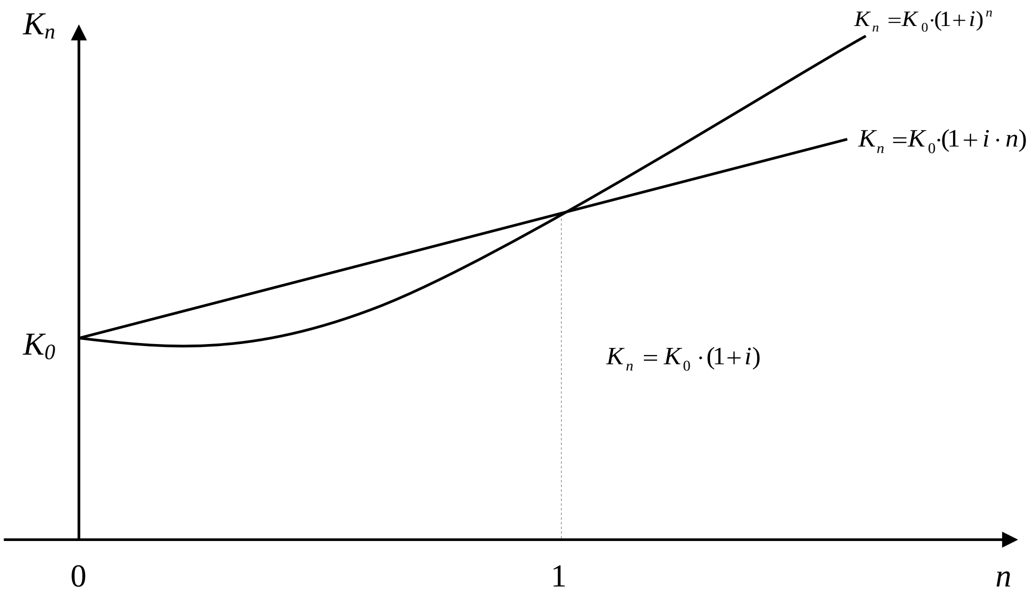
Pre $0 < i < 1$ môžeme približne položiť

$$(1+i)^n \approx 1 + n \cdot i + \frac{n \cdot (n-1)}{2!} \cdot i^2$$

Pre $0 < n < 1$ je výraz $\frac{n \cdot (n-1)}{2!} \cdot i^2$ záporný, a teda $(1+i)^n < 1 + i \cdot n$.

Pre $n=1$ je $(1+i)^n = 1 + i \cdot n$.

Pre $n > 1$ je výraz $\frac{n \cdot (n-1)}{2!} \cdot i^2$ kladný, a teda $(1+i)^n \rangle 1 + i \cdot n$.



Obr. 1 Graf jednoduchého a zloženého úrokovania

Nárast kapitálu K_0 pre jednoduché a zložené úrokovanie je teda závislý od doby úrokovania a platí:

Ak 0 < n < 1, tak $K_0 \cdot (1 + i \cdot n) > K_0 \cdot (1 + i)^n$

ak n =1, tak $K_0 \cdot (1 + i \cdot n) > K_0 \cdot (1 + i)^n$

ak n >1, tak $K_0 \cdot (1 + i \cdot n) > K_0 \cdot (1 + i)^n$

čo vidieť na Obr. 1.

1.1.9 Zmiešané úrokovanie

Zmiešané úrokovanie je vlastne kombináciou jednoduchého a zloženého úrokovania. Môžu nastať prípady ak úrokové obdobie je väčšie ako úroková perióda, ale nie je celočíselným násobkom úrokovej periódy, alebo ak sa kapitál vloží počas roka a po niekoľkých rokoch sa opäť vyberie počas roka. HUŤKA, Vladimír – PELLER, František (2010) rozdeľuje zmiešané úrokovanie do nasledujúcich kapitol.

1.1.9.1 Úrokové obdobie bude desatinné číslo väčšie ako úroková perióda.

Nech úrokové obdobie n sa dá vyjadriť takto:

$$n = N + t$$

kde

N – celé číslo udávajúce počet rokov – použijeme zložené úrokovanie;

t – číslo menšie ako 1, udávajúce časť roka – použijeme jednoduché úrokovanie.

Ak K_0 je začiatočný kapitál, tak po N rokoch vzrastie na hodnotu

$$K_N = K_0 \cdot (1 + i)^N$$

a za dobu t vzrastie kapitál K_N na hodnotu $K_N \cdot (1 + i \cdot t)$.

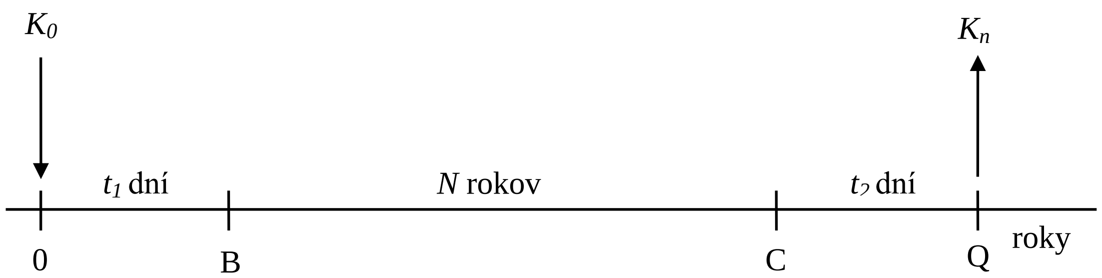
Budúca hodnota K_n pri zmiešanom úrokovaní zodpovedajúca prítomnej hodnote K_0 pri ročnej úrokovej sadzbe i, za úrokové obdobie n je

$$K_N = K_0 \cdot (1 + i)^N \cdot (1 + i \cdot t) \tag{6}$$

pričom $n = N + t$, $0 \leq t < 1$, N je prirodzené číslo.

1.1.9.2 Kapitál K_0 sa vloží počas roka a po rokoch sa opäť vyberie počas roka

Nech t_1 je počet dní do konca prvého roka, N je počet celých rokov a t_2 je počet dní v poslednom roku, v ktorom sa vyberie vklad. Táto situácia je znázornená na Obr. 2.



Obr. 2 Kapitál sa vloží počas roka a po rokoch sa vyberie počas roka

Konečný kapitál v bode B:

$K_0 \cdot (1 + i \cdot t_1)$ jednoduché úrokovanie

Konečný kapitál v bode C:

$K_0 \cdot (1 + i \cdot t_1) \cdot (1 + i)^N$ zložené úrokovanie

Konečný kapitál v bode Q:

$K_0 \cdot (1 + i \cdot t_1) \cdot (1 + i)^N \cdot (1 + i \cdot t_2)$ jednoduché úrokovanie

Budúca hodnota K_n pri zmiešanom úrokovaní je

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i \cdot t_1) \cdot (1 + i)^N \cdot (1 + i \cdot t_2) \quad (7)$$

kde

t_1 – doba úrokovania do konca 1. roka,

N – doba úrokovania v celých rokoch,

t_2 – doba úrokovania v poslednom roku.

1.1.10 Spojité úrokovanie

Priebeh úročenia, pri ktorom sa úrokovanie uskutočňuje v časových intervaloch blížiacich sa k nule, pre $\Delta t \to 0$, čiže pre počet konverzií m v roku rastúcich do nekonečna, sa nazýva spojité úrokovanie definuje HUŤKA, Vladimír – PELLER, František (2010).

Predpokladáme nominálnu úrokovú sadzbu $i^{(m)}$ závislosti od m a označujeme

$$\delta = \lim_{m \to \infty} i(m)$$

Veličinu δ nazývame úrokovou sadzbou spojitého úrokovania.

Budúcu hodnotu K_n zodpovedajúcu prítomnej hodnote K_0 určíme teda ako limitu zo vzťahu pre $m \to \infty$:

$$K_n = \lim_{m \to \infty} K_0 \cdot \left(1 + \frac{\delta}{m}\right)^{mn} = K_0 \cdot e^{\delta n}$$

Nech K_0 je začiatočná hodnota kapitálu, δ úroková sadzba spojitého úrokovania. Potom budúca hodnota K_n zodpovedajúca kapitálu K_0 za n rokov je vyjadrená vzťahom:

$$K_n = K_0 \cdot e^{\delta n} \quad (8)$$

Veličinu $e^{\delta n}$ nazývame úrokovacím faktorom (úročiteľom) spojitého úrokovania. Určuje úrok z 1 p.j. pri úrokovej sadzbe spojitého úrokovania δ za 1 rok.

1.2 Pojem funkcia jednej reálnej premennej

V prírode existuje nespočetné množstvo javov a procesov a závislosti medzi nimi sú veľmi zložité a nie je možné ich definovať jednoduchými vzťahmi. Objektívne závislosti, ktoré existujú medzi veličinami, viedli postupne, prostredníctvom abstrakcie, ku vzniku matematickému pojmu funkcia. Definíciu pojmu funkcie v matematických termínoch podal L.Euler (1707-1783), a definoval ju ako výraz vyjadrujúci istú závislosť medzi číslami. Túto formuláciu upresnil P. G. Dirichlet (1805-1859), ktorý použil pri definícií pojmu funkcie pojem priradenia (ORSZÁGHOVÁ, Dana, 2008).

Základné definície, ktoré použijeme v nasledujúcich kapitolách o funkcii jednej reálnej premennej vychádzajú z definícií odbornej literatúry: ORSZÁGHOVÁ, Dana. – BARANÍKOVÁ Helena (2008), Trenčianska, Anna (2006), MATEJDES, Milan (2005), RADOVÁ, Jarmila – DVOŘÁK, Petr, (1997) a iní autori.

1.2.1 Definícia funkcie

Nech M a N sú neprázdne podmnožiny množiny reálnych čísel. Ak ku každému prvku x z množiny M priradíme podľa určitého predpisu práve jeden prvok y z množiny N, potom hovoríme, že na množine M je definovaná **funkcia jednej reálnej premennej**. Funkciu označíme f a zapíšeme v tvare

$$y = f(x).$$

Prvok x z množiny M sa nazýva nezávisle premenná, prvok y z množiny N je závislé premenná, môžeme ho označiť aj $f(x)$ a nazývame ho hodnotou funkcie v prvku x. Množina M je definičný obor funkcie, označujeme ho $D(f)$, alebo D_f. Množinu všetkých závislé premenných y, pre všetky $x \in M$ nazývame obor hodnôt funkcie f, označujeme ho $H(f)$, alebo D_f. Množina $H(f)$ je podmnožinou množiny N. Určiť funkciu f znamená určiť definičný obor $D(f)$ a pravidlo priradenia $y = f(x)$. Niekedy sa však stretneme s tým, že je určené len $y = f(x)$ a definičný obor musíme dourčiť. Vtedy $D(f)$ rozumieme množinu všetkých $x \in R$, ku ktorým existuje $x \in R$ také, že $y = f(x)$. Tento definičný obor sa tiež nazýva prirodzený definičný obor funkcie, alebo jednoducho definičný obor a môžeme ho vyjadriť aj v tvare : $D(f) = \{x \in R, \exists y \in R, y = f(x)\}$.

Funkcia môže byť určená niektorým z nasledujúcich spôsobov:

1) **Analyticky** – vzorcom, t.j. rovnicou:
    a. explicitne v tvare $y = f(x)$,

b. implicitne v tvare $F(x, y) = 0$,

2) **Graficky** - grafom funkcie (Obr. 3),

3) **Pomocou tabuľky usporiadaných dvojíc** – spravidla vo forme tabuľky. Tento spôsob je použiteľný jedine pre funkcie, ktorých definičným oborom je konečná množina.

4) **Slovne**.

Pri vyšetrovaní definičného oboru sledujeme tieto základné podmienky:

- menovateľ zlomku sa nesmie rovnať nule,
- pod párnou odmocninou musí byť nezáporný výraz,
- argument logaritmickej funkcie musí byť kladný.

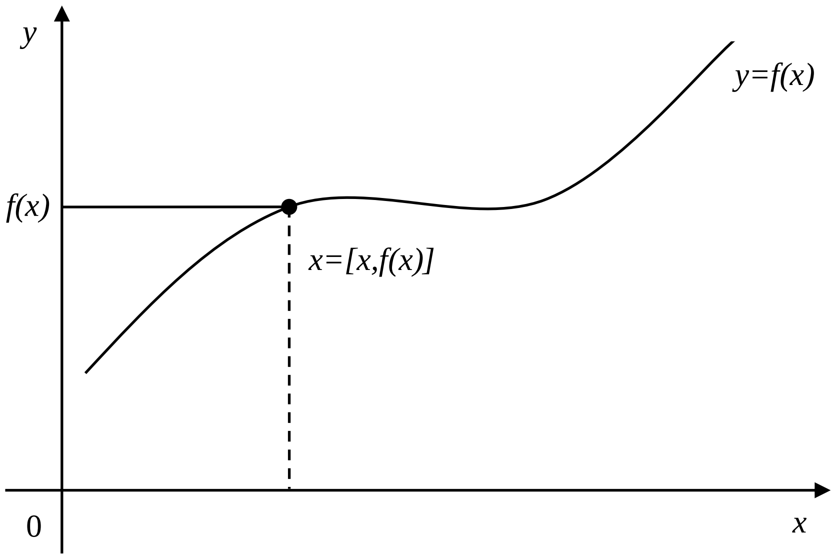
1.2.2 Vlastnosti funkcií

Pri určovaní priebehu akejkoľvek funkcie vždy vychádzame zo znalostí vlastnosti danej funkcie. A práve vlastnosti sú predmetom tejto podkapitoly. Pre dosiahnutie lepšej názornosti sme niektoré vlastnosti funkcie zdokumentovali aj prostredníctvom grafov.

Základné množiny a vlastnosti, ktoré charakterizujú dané funkcie:

1) definičný obor *D(f),* obor hodnôt *H (f)*
2) ohraničenosť
3) monotónnosť funkcie
4) párnosť, nepárnosť
5) lokálne extrémy
6) periodickosť

Grafický obraz funkcie nám dáva názornú predstavu o priebehu funkcie, o jej polohe vzhľadom na osi súradnicovej sústavy a pod. Umožňuje nám pochopiť aj niektoré vlastnosti, ktoré funkcie môžu mať.



Obr. 3 Graf funkcie *f*

Z analytickej geometrie vieme, že v karteziánskej sústave súradníc $(O; x, y)$ každej usporiadanej dvojici reálnych čísel zodpovedá práve jeden bod roviny. Namiesto $[x, y] \in f$ často píšeme $y = f(x)$.

Graf funkcie *f* je množina všetkých tých bodov [*x*, *y*] v rovine, ktoré majú tieto vlastnosti:

a) $x \in D(f)$,

b) *y* je hodnota funkcie *f* v *x* t.j. $y = f(x)$.

Grafom funkcie *f* je teda množina všetkých tých bodov [*x*, *y*], ktoré vyhovujú rovnici $y = f(x)$ (Obr.3). Niekedy tiež hovoríme, že grafom funkcie *f* je čiara (krivka) určená rovnicou $y = f(x)$.

1.2.2.1 Základné vlastnosti funkcii

Funkcia *f* sa nazýva **ohraničená zhora** na $M \subset D(f)$ práve vtedy, ak existuje také $h \in R$, že pre všetky $x \in M$ platí $f(x) \le h$.

Funkcia *f* sa nazýva **ohraničená zdola** na $M \subset D(f)$ práve vtedy, ak existuje také $d \in R$, že pre všetky $x \in M$ platí $f(x) \ge d$.

Funkcia f sa nazýva **ohraničená** na množine M, pričom $M \subset D(f)$ práve vtedy, ak je ohraničená zhora aj zdola na množine M, t.j. existuje také $d, h \in R$, že pre každé x z množiny platí $d \leq f(x) \leq h$. V opačnom prípade sa nazýva **neohraničená**.

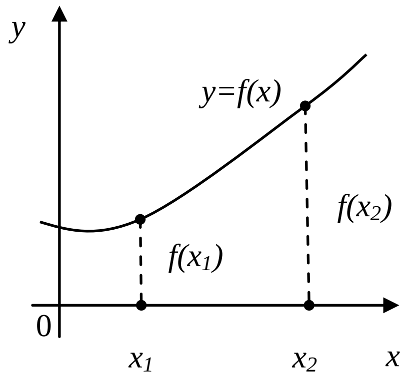
Nech je daná funkcia f s definičným oborom $D(f)$. ak pre ľubovoľné $x_1, x_2 \in D(f)$, pričom $x_1 < x_2$, platí:

$f(x_1) < f(x_2)$, potom funkcia f sa nazýva **rastúca** (Obr. 4),

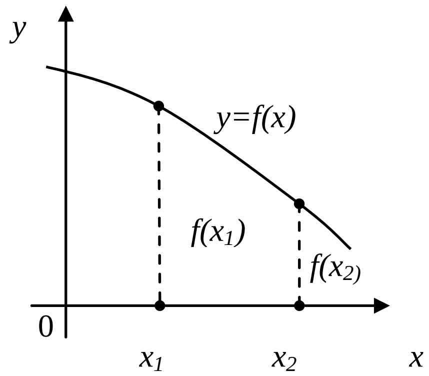
$f(x_1) \leq f(x_2)$, potom funkcia f sa nazýva **neklesajúca**,

$f(x_1) > f(x_2)$, potom funkcia f sa nazýva **klesajúca** (Obr. 5),

$f(x_1) \geq f(x_2)$, potom funkcia f sa nazýva **nerastúca**.



Obr. 4 Graf rastúcej funkcie



Obr. 5 Graf klesajúcej funkcie

Tieto funkcie nazývame **monotónne**. Rastúce a klesajúce funkcie nazývame **rýdzomonotónne**.

Nech je daná funkcia f s definičným oborom $D(f)$. Táto funkcia sa nazýva **prostá** (jednoznačná), ak pre ľubovoľné $x_1, x_2 \in D(f), x_1 \neq x_2$ platí: $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Nech je daná funkcia f s definičným oborom $D(f)$ a nech platí, pre každé $x \in D(f)$, aj $-x \in D(f)$. Potom funkcia f sa nazýva **párna**, ak pre všetky $x \in D(f)$ platí: $f(-x) < f(x)$.

Nech je daná funkcia f s definičným oborom $D(f)$ a nech platí, pre každé $x \in D(f)$ aj $-x \in D(f)$. Potom funkcia *f* sa nazýva **nepárna**, ak pre všetky $x \in D(f)$ platí: $f(-x) < -f(x)$.

Nech f je funkcia s definičným oborom $D(f)$ a nech p je kladné reálne číslo. Hovoríme, že funkcia f je **periodická** s periódou *p*, ak pre každé $x \in D(f)$ platí: $f(x+p) = f(x)$. Každé číslo p s danou vlastnosťou sa nazýva perióda funkcie *f*.

Funkcia f má v bode a množiny M **maximum** práve vtedy, keď pre každé $x \in M$ platí: $f(x) \leq f(a)$. Funkcia *f* má v bode b množiny M **minimum** práve vtedy, keď pre každé $x \in M$ platí: $f(x) \geq f(b)$

2 Cieľ práce

Finančná matematika predstavuje jednu z najzaujímavejších aplikácii matematiky v praxi. V tejto časti sme sa zamerali na určitú problematiku finančnej matematiky a jej všeobecného využitia.

Hlavným cieľom bakalárskej práce je analyzovanie rôznych typov úrokovania, porovnanie vzťahov medzi jednoduchým a zloženým úrokovaním, výpočet a grafické znázornenie veľkosti konečnej hodnoty kapitálu v závislosti od doby úrokovania vkladu a úrokovej sadzby. Na základe vytvorených grafov poukázať na to, ako sa menia krivky jednoduchého a zloženého úrokovania v závislosti od doby úrokovania.

Parciálne ciele bakalárskej práce tvoria nasledovné oblasti:

1) Charakteristika poznatkov o úrokovom počte z rôznych hľadísk.
2) Rozdelenie rôznych typov úrokovania a spôsob ich výpočtu.
3) Charakteristika základných vlastností funkcií
4) Definícia lineárnej a exponenciálnej funkcie vo vzťahu k jednoduchému a zloženému úrokovaniu.
5) Grafické znázornenie lineárnej a exponenciálnej funkcie a prostredníctvom nich znázorniť aj priebeh úrokovania.
6) Porovnanie konečných hodnôt v závislosti od doby úrokovania a úrokovej sadzby.
7) Pomocou grafov a výpočtov zhodnotiť jednoduché a zložené úrokovanie.

Zámerom bakalárskej práce je priblížiť si finančnú matematiku zaujímavejším a nenúteným spôsobom a v neposlednom rade preveriť si nadobudnuté vedomosti z oblasti danej témy získané v priebehu vzdelávania na Fakulte ekonomiky a manažmentu na SPU v Nitre.

3 Metodika práce

Hlavnou metódou pri zostavovaní našej bakalárskej práce sa stalo zhromažďovanie materiálov v súvislosti s danou témou. Podstatnou časťou tvorby bakalárskej práce je naďalej vytváranie grafov lineárnej a exponenciálnej funkcie pomocou programového systému Microsoft Excel 7.0.

Pri písaní práce vychádzame najmä z predznačeného hlavného cieľa a parciálnych cieľov. Môžeme tvrdiť, že po selekcii a analýze sme ako ďalšiu metódu použili modelovanie grafov a následne vysvetlenie. Z chronologického hľadiska je metodicky postup nasledovný:

1) Preštudovanie literatúry a zhromažďovanie potrebných materiálov
2) Vypracovanie teoretickej časti ohľadom danej problematiky
3) Určenie cieľov práce
4) Vo vlastnej práci vypočítanie modelového príkladu
5) Vytváranie grafov lineárnej a exponenciálnej funkcie na základe vypočítanej konečnej hodnoty kapitálu pre jednoduché a zložené úrokovanie
6) Grafické vysvetlenie úrokovania
7) Využitie získaných poznatkov počas štúdia na SPU

Bakalárska práca je rozčlenená na teoretickú a praktickú časť. Teoretickú časť tvoria vedecké a odborné poznatky uvedených autorov v oblasti finančnej matematiky, konkrétne z oblasti úrokovania a funkcie jednej reálnej premennej.

Praktickú časť tvorí modelová úloha, ktorá je zameraná na výpočet konečnej hodnoty kapitálu pre jednoduché a zložené úrokovanie. Riešenie modelového príkladu sme robili v Exceli, preto sa výpočty uvádzajú v tabuľkách a na základe nich sú zostavené grafy. Porovnanie a interpretácia modelového príkladu je uvedená v závere bakalárskej práce.

V praktickej časti sme použili vzorce, ktoré vo svojej odbornej literatúre uvádzajú viacerí autori: HARSHBARGER, Ronald J. – REYNOLDS, James J. (1989), HUŤKA, Vladimír – PELLER, František (2010), CIPRA, Tomáš. (2006), GALLO, Pavol. 1995 a ďalší.

Jednoduché úrokovanie je príkladom využitia lineárnej funkcie v praxi.

Konečná hodnota vloženého kapitálu pri jednoduchom úrokovaní je vyjadrená vzťahom $K_n = K_0 \cdot (1 + i \cdot n)$.

Grafickým znázornením jednoduchého úrokovania je **lineárna priamka**.

Lineárna funkcia:

$$y = ax + b; a, b \in R; a \neq 0 \tag{9}$$

Grafom je priamka rovnobežná s osou *y*.

Vo vzorci (3) vystupujú 4 veličiny : K_n , K_0 , i, n. ľubovoľnú z nich môžeme vyjadriť v závislosti od ostatných troch. Dostaneme nasledovné vzťahy:

- vzorec na výpočet prítomnej hodnoty:

$$K_0 = \frac{K_n}{1 + i \cdot n} \tag{10}$$

- vzorec na výpočet úrokovej sadzby:

$$i = \frac{K_n - K_0}{n \cdot K_0} \tag{11}$$

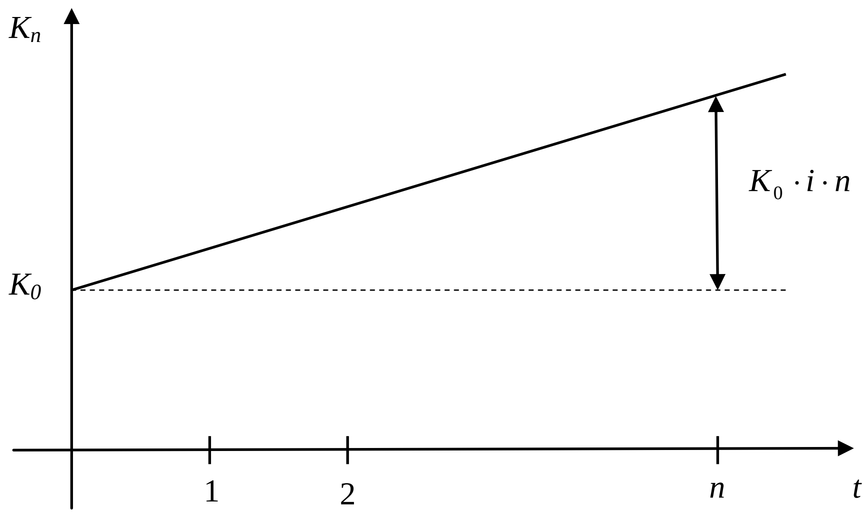
- vzorec na výpočet dĺžky úrokovacieho obdobia:

$$n = \frac{K_0 - K_n}{i \cdot K_0} \tag{12}$$

Veličinu

ktorá udáva, o koľko vzrastie 1 p.j. pri úrokovej sadzbe i za jednu úrokovú periódu, nazývame úročiteľom (úrokovacím faktorom).

Zo vzťahu $K_n = K_0 \cdot (1 + i \cdot n)$ vyplýva, že pri daných K_0, i je $K_n = K_n(n)$ lineárnou funkciou n (Obr. 6), ktorej smernica je $K_0 \cdot i$.



Obr. 6 Nárast kapitálu pre jednoduché úrokovanie

Veľkosť celkového úroku z viacerých vkladov (istín) pri rôznych úrokových obdobiach, ale pri rovnakej úrokovej miere, sa určí nasledovne. Nech kapitál K_1 je úročený za t_1 dní, kapitál K_2 za t_2 dní, ..., kapitál K_r úročený za t_r dní pri rovnakej p % ročnej úrokovej miere. Celkový úrok z kapitálov K_1, K_2,..., K_r pre štandard ACT/365 bude

$$u = \sum_{j=1}^{r} \left[K_j \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{t_j}{365} \right] = \sum_{j=1}^{r} \frac{\frac{K_j \cdot t_j}{100}}{\frac{365}{p}} \tag{13}$$

Veličinu $\frac{K_j \cdot t_j}{100}$ nazývame úrokové číslo (pre j-tý vklad), veličinu $\frac{365}{p}$ (resp. $\frac{365}{p}$ pre ACT/360) nazývame úrokový deliteľ. Zo vzťahu (7) vyplýva, že výsledný úrok z viacerých istín dostaneme tak, že sčítame úrokové čísla jednotlivých istín a výsledok delíme úrokovým deliteľom.

Uvažujeme teraz prípad, že jedna osoba uskutoční r vkladov za nasledujúcich podmienok:

Vklad Úroková miera Úrokové obdobie

K_1	p_1	n_1 dní
K_2	p_2	n_2 dní
:	:	:
K_r	p_r	n_r dní

Celkový úrok bude

$$u = \sum_{j=1}^{r} K_j \cdot \frac{p_j}{100} \cdot \frac{n_j}{365} \tag{14}$$

Nazvime **priemernou úrokovou mierou** vkladov $K_1, K_2, \ldots, K_r$ takú úrokovú mieru p, ktorá aplikovaná na vklady $K_1, K_2, \ldots, K_r$ a zodpovedajúce úrokové obdobia n_1, n_2, n_r prinesie rovnaký úrok ako je celkový úrok podľa vzťahu (13). Vypočítame ju zo vzťahu

$$u = \sum_{j=1}^{r} K_j \cdot \frac{p_j}{100} \cdot \frac{n_j}{365} = \sum_{j=1}^{r} K_j \cdot \frac{p_j}{100} \cdot \frac{n_j}{365}$$

odkiaľ, po úpravách, máme

$$p = \frac{\sum_{j=1}^{r} K_j \cdot p_j \cdot n_j}{\sum_{j=1}^{r} K_j \cdot n_j} \tag{15}$$

Zložené úrokovanie je príkladom využitia exponenciálnej funkcie v praxi.

Konečná hodnota vloženého kapitálu pri zloženom úrokovaní je vyjadrená vzťahom $K_n = K_0(1+i)^n$.

Grafickým znázornením zloženého úrokovania je **exponenciálna krivka**.

Exponenciálna funkcia:

$$y = a^x; a \in R^+ - \{1\} \tag{16}$$

Grafom je exponenciálna krivka, jej priebeh závisí od základu *a*.

Zo vzorca (4) môžeme vyjadriť ľubovoľnú zo štyroch veličín K_0, K_n, i, n v závislosti od zvyšných troch. Dostaneme nasledujúce vzorce na výpočet základných veličín:

- vzorec na výpočet prítomnej hodnoty:

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n} \tag{17}$$

- vzorec na výpočet úrokovej sadzby:

$$i = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1 \tag{18}$$

- vzorec na výpočet dĺžky úrokovacieho obdobia:

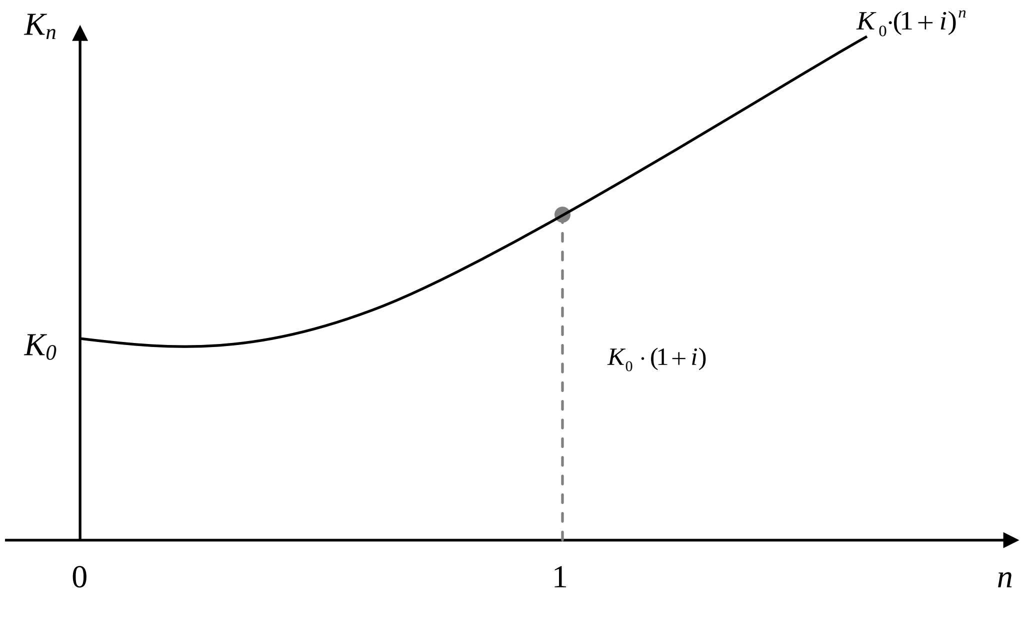
$$n = \frac{\ln K_n - \ln K_0}{\ln(1+i)} \tag{19}$$

Veličinu

$$r = 1 + i \tag{20}$$

nazývame úročiteľom (úrokovacím faktorom) za 1 úrokovú periódu. Udáva, na koľko vzrastie 1 p.j. pri úrokovej sadzbe i za jednu periódu.

Zo vzťahu $K_n = K_0 \cdot (1+i)^n$ vyplýva, že K_n je exponenciálnou funkciou n (Obr.7), ktorej smernica je $K_0 \cdot (1+i)$



Obr. 7 Nárast kapitálu pre zložené úrokovanie

Ak od budúcej hodnoty odčítame prítomnú hodnotu , dostaneme celkový úrok po n periódach :

$$u_n = K_n - K_0 = K_0 \cdot (1+i)^n - K_0 = K_0 \cdot (r^n - 1)$$

Prírastok začiatočného kapitálu po k periódach je

$$K_0 \cdot (1+i)^k - K_0 \cdot (r^k - 1)$$

a prírastok resp. úroky v k-tej perióde je

$$K_0 \cdot (1+i)^{k-1} \cdot i$$

Spojité úrokovanie je príkladom využitia exponenciálnej funkcie v praxi.

Konečná hodnota vloženého kapitálu pri spojitom úrokovaní je vyjadrená vzťahom

$$K_n = K_0 \cdot e^{\delta n} \tag{21}$$

Grafickým znázornením spojitého úrokovania je **exponenciálna krivka**.

V modelovom príklade pre lepšie znázornenie meniacich sa budúcich hodnôt používame len jednoduché a zložené úrokovanie.

4 Vlastná práca

Téma sa zaoberá porovnávaním rôznych typov úrokovania z grafického hľadiska. V tejto časti bakalárskej práce uvádzame jednoduché a zložené úrokovanie. Každý typ úrokovania si ešte zhrnieme, graficky znázorníme a na záver porovnáme.

Základné pojmy:

Kapitál (istina) – peňažná suma, ktorú poskytne veriteľ dlžníkovi za určitý poplatok

Úrok – poplatok dlžníka veriteľovi za používanie jeho peňazí

Úroková perióda – časové obdobie, za ktoré percentová miera určuje úrok ako časť kapitálu

Úroková miera – percentová miera, ktorá zodpovedá úrokovej perióde

Úroková sadzba – úroková miera v tvare desatinného čísla

Úrokovanie – proces spojený s výpočtom úroku

Úrokové obdobie – časové obdobie, počas ktorého prebieha úrokovanie

Typy úrokovania:

Jednoduché – úrok sa v každej úrokovej perióde určuje z konštantného začiatočného kapitálu, resp. sa počíta úrok za časť úrokovej periódy.

Zložené – úrok sa v každej úrokovej perióde počíta z kapitálu zväčšeného o úroky z predchádzajúceho obdobia.

Tieto dve typy sú pre nás dôležité.

Zmiešané – úrokové obdobie je dlhšie ako úroková perióda.

Spojité – úrokovanie je založené na maximalizácií počtu úročení behom roka, počet konverzií $m \to \infty$.

Pri jednoduchom i zloženom úrokovaní budeme používať nasledujúce označenia:

K_0 – začiatočná hodnota kapitálu;

K_n – konečná hodnota kapitálu;

u – úrok;

p% - úroková miera – percentová úroková miera s určením zodpovedajúcej úrokovej periódy (tzv. obchodná úroková miera);

$i = \frac{p}{100}$ - úroková sadzba s určením zodpovedajúcej úrokovej periódy;

n – dĺžka úrokového obdobia, vyjadrená v jednotkách úrokovej periódy (počet úrokových periód);

4.1 Modelový príklad

Vypočítajte konečnú hodnotu kapitálu, ak vklad 10 000 eur bol vložený do banky pri 0,3%, 0,9%, 2,7%, 5%, 6,5%, 8%, 10% ročnej úrokovej miere za 3 mesiace, pol rok, 1 rok, 2 roky, 5 rokov, 10 rokov, 15 rokov, 30 rokov.

1. Riešenie:

Nájdite konečnú hodnotu kapitálu 10000 eur po *n* rokoch, vloženého do banky, ktorá poskytuje 0,3% ročnú úrokovú mieru.

$K_0 = 10000$

$i = 0{,}003$

Podľa vzorcov pre výpočet konečnej hodnoty kapitálu pre jednoduché a zložené úrokovanie sme dostali:

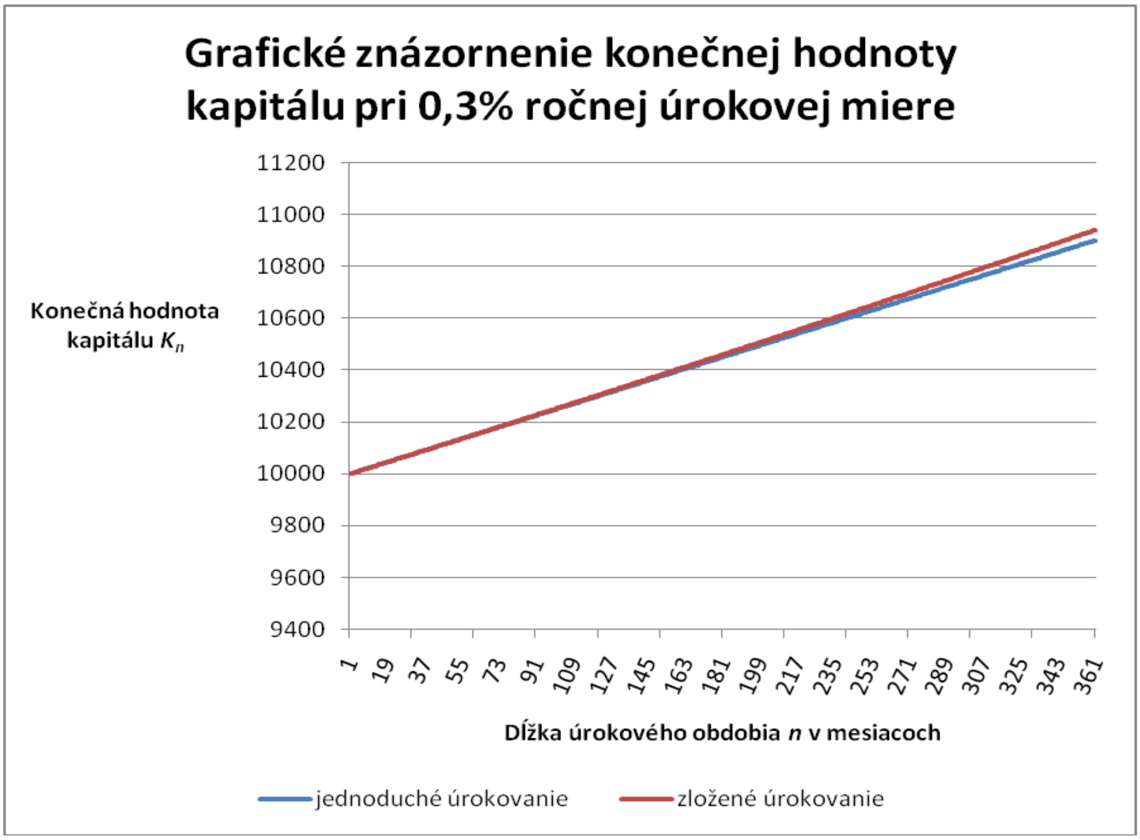
$K_n = 10000 \cdot (1 + 0{,}003 \cdot n)$

$K_n = 10000 \cdot (1 + 0{,}003)^n$

Pričom dĺžka úrokového obdobia $n = \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; 1; 2; 5; 10; 15; 30.$

Tab. 1 Nárast konečnej hodnoty kapitálu pri p=0,3% p.a.

n – dĺžka úrokového obdobia	Konečná hodnota kapitálu K_n		Zložené - Jednoduché
	Jednoduché úrokovanie	Zložené úrokovanie	
$\frac{1}{4}$ roka	10007,50	10007,49	-0,01
$\frac{1}{2}$ roka	10015,00	10014,99	-0,01
1 rok	10030,00	10030,00	0,00
2 roky	10060,00	10060,09	0,09
5 rokov	10150,00	10150,90	0,90
10 rokov	10300,00	10304,08	4,08
15 rokov	10450,00	10459,57	9,57
30 rokov	10900,00	10940,27	40,27



Obr. 8 Grafické zobrazenie nárastu kapitálu pri 0,3% ročnej úrokovej miere

2. Riešenie:

Nájdite konečnú hodnotu kapitálu 10000 eur po n rokoch, vloženého do banky, ktorá poskytuje 0,9% ročnú úrokovú mieru.

$K_0 = 10000$

$i = 0{,}009$

Podľa vzorcov pre výpočet konečnej hodnoty kapitálu pre jednoduché a zložené úrokovanie sme dostali:

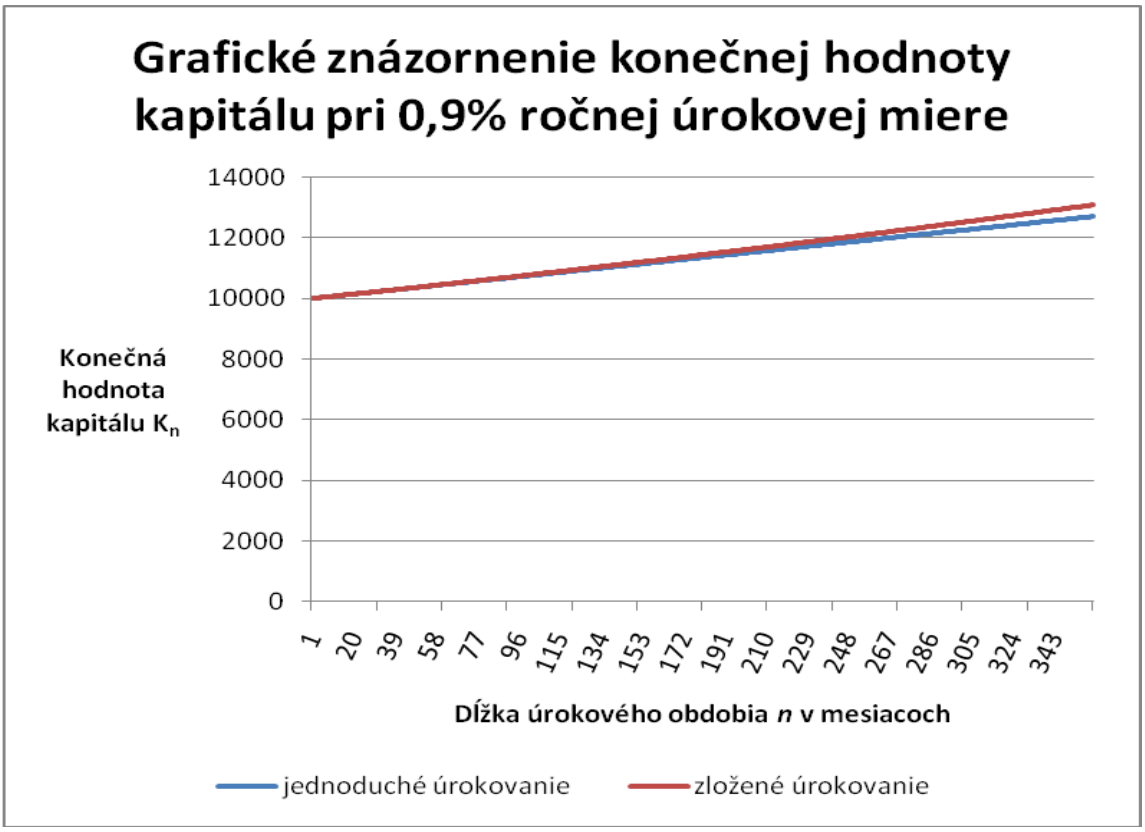
$K_n = 10000 \cdot (1 + 0{,}009 \cdot n)$

$K_n = 10000 \cdot (1 + 0{,}009)^n$

Pričom dĺžka úrokového obdobia $n = \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; 1; 2; 5; 10; 15; 30.$

Tab. 2 Nárast konečnej hodnoty kapitálu pri p=0,9% p.a.

n – dĺžka úrokového obdobia	Konečná hodnota kapitálu K_n		Zložené - Jednoduché
	Jednoduché úrokovanie	Zložené úrokovanie	
$\frac{1}{4}$ roka	10022,50	10022,42	-0,08
$\frac{1}{2}$ roka	10045,00	10044,90	-0,10
1 rok	10090,00	10090,00	0,00
2 roky	10180,00	10180,81	0,81
5 rokov	10450,00	10458,17	8,17
10 rokov	10900,00	10937,34	37,34
15 rokov	11350,00	11438,46	88,46
30 rokov	12700,00	13083,83	383,83



Obr. 9 Grafické zobrazenie nárastu kapitálu pri 0,9% ročnej úrokovej miere

3. Riešenie:

Nájdite konečnú hodnotu kapitálu 10000 eur po *n* rokoch, vloženého do banky, ktorá poskytuje 2,7% ročnú úrokovú mieru.

$K_0 = 10000$

$i = 0{,}027$

Podľa vzorcov pre výpočet konečnej hodnoty kapitálu pre jednoduché a zložené úrokovanie sme dostali:

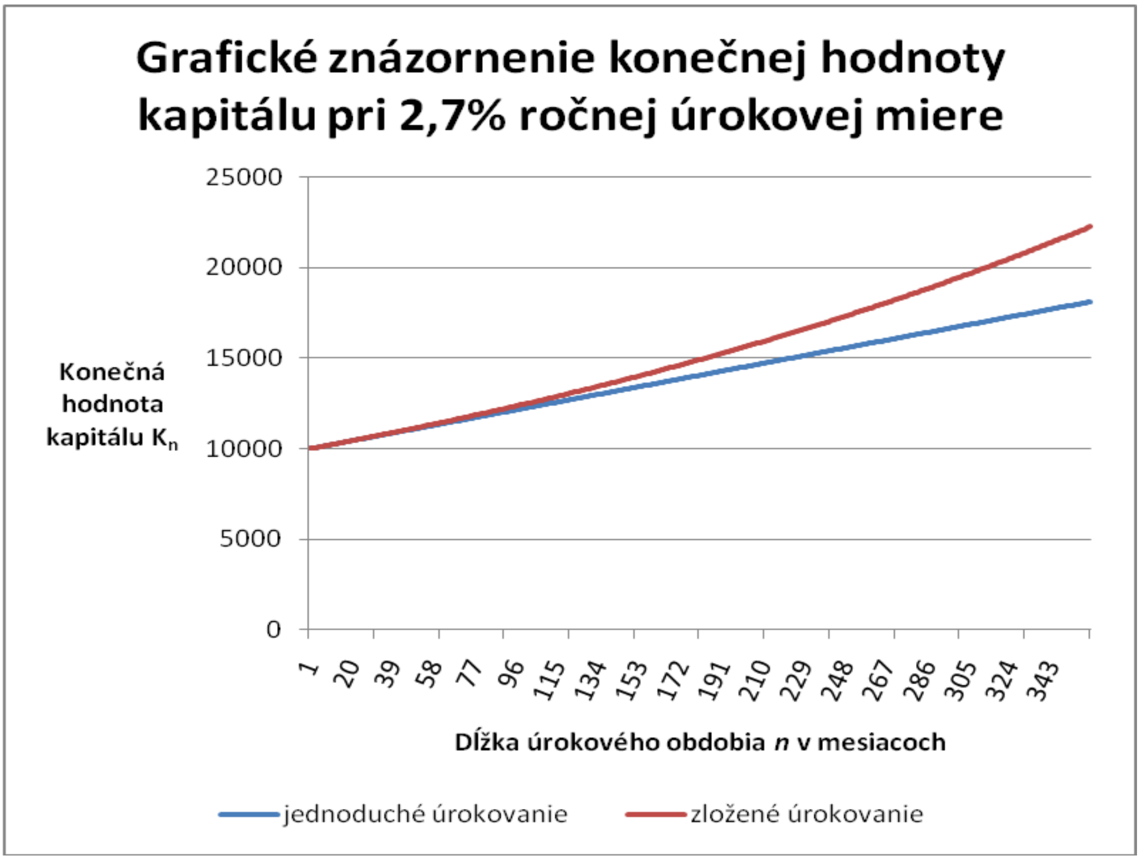
$K_n = 10000 \cdot (1 + 0{,}027 \cdot n)$

$K_n = 10000 \cdot (1 + 0{,}027)^n$

Pričom dĺžka úrokového obdobia $n = \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; 1; 2; 5; 10; 15; 30.$

Tab. 3 Nárast konečnej hodnoty kapitálu pri p=2,7% p.a.

n – dĺžka úrokového obdobia	Konečná hodnota kapitálu K_n		Zložené - Jednoduché
	Jednoduché úrokovanie	Zložené úrokovanie	
$\frac{1}{4}$ roka	10067,50	10066,83	-0,67
$\frac{1}{2}$ roka	10135,00	10134,10	-0,90
1 rok	10270,00	10270,00	0,00
2 roky	10540,00	10547,29	7,29
5 rokov	11350,00	11424,90	74,90
10 rokov	12700,00	13052,82	352,82
15 rokov	14050,00	14912,71	862,71
30 rokov	18100,00	22238,90	4138,90



Obr. 10 Grafické zobrazenie nárastu kapitálu pri 2,7% ročnej úrokovej miere

4. Riešenie:

Nájdite konečnú hodnotu kapitálu 10000 eur po n rokoch, vloženého do banky, ktorá poskytuje 5% ročnú úrokovú mieru.

$K_0 = 10000$

$i = 0{,}05$

Podľa vzorcov pre výpočet konečnej hodnoty kapitálu pre jednoduché a zložené úrokovanie sme dostali:

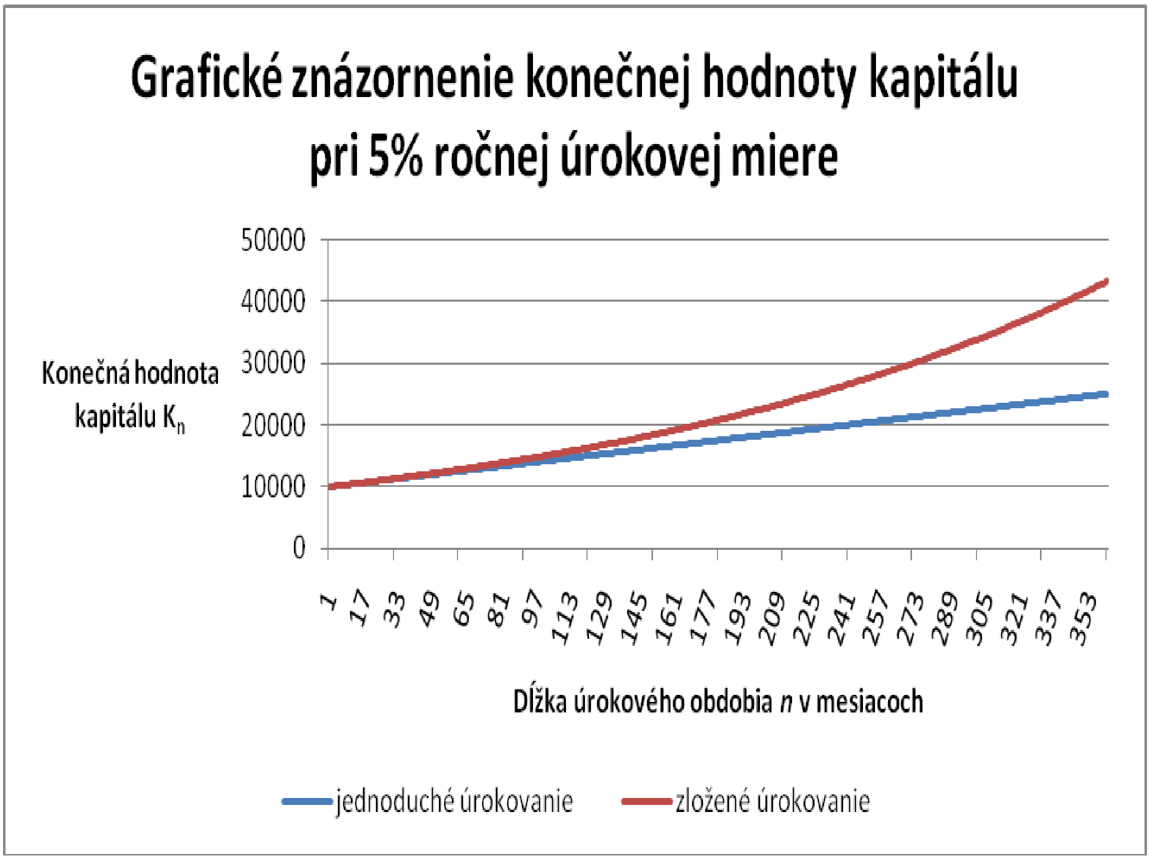
$K_n = 10000 \cdot (1 + 0{,}05 \cdot n)$

$K_n = 10000 \cdot (1 + 0{,}05)^n$

Pričom dĺžka úrokového obdobia $n = \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; 1; 2; 5; 10; 15; 30.$

Tab. 4 Nárast konečnej hodnoty kapitálu pri p=5% p.a.

n – dĺžka úrokového obdobia	Konečná hodnota kapitálu K_n		Zložené - Jednoduché
	Jednoduché úrokovanie	Zložené úrokovanie	
$\frac{1}{4}$ roka	10125,00	10122,72	-2,28
$\frac{1}{2}$ roka	10250,00	10246,95	-3,05
1 rok	10500,00	10500,00	0,00
2 roky	11000,00	11025,00	25,00
5 rokov	12500,00	12762,82	262,82
10 rokov	15000,00	16288,95	1288,95
15 rokov	17500,00	20789,28	3289,28
30 rokov	25000,00	43219,42	18219,42



Obr. 11 Grafické zobrazenie nárastu kapitálu pri 5% ročnej úrokovej miere

5. Riešenie:

Nájdite konečnú hodnotu kapitálu 10000 eur po n rokoch, vloženého do banky, ktorá poskytuje 6,5% ročnú úrokovú mieru.

$K_0 = 10000$

$i = 0{,}065$

Podľa vzorcov pre výpočet konečnej hodnoty kapitálu pre jednoduché a zložené úrokovanie sme dostali:

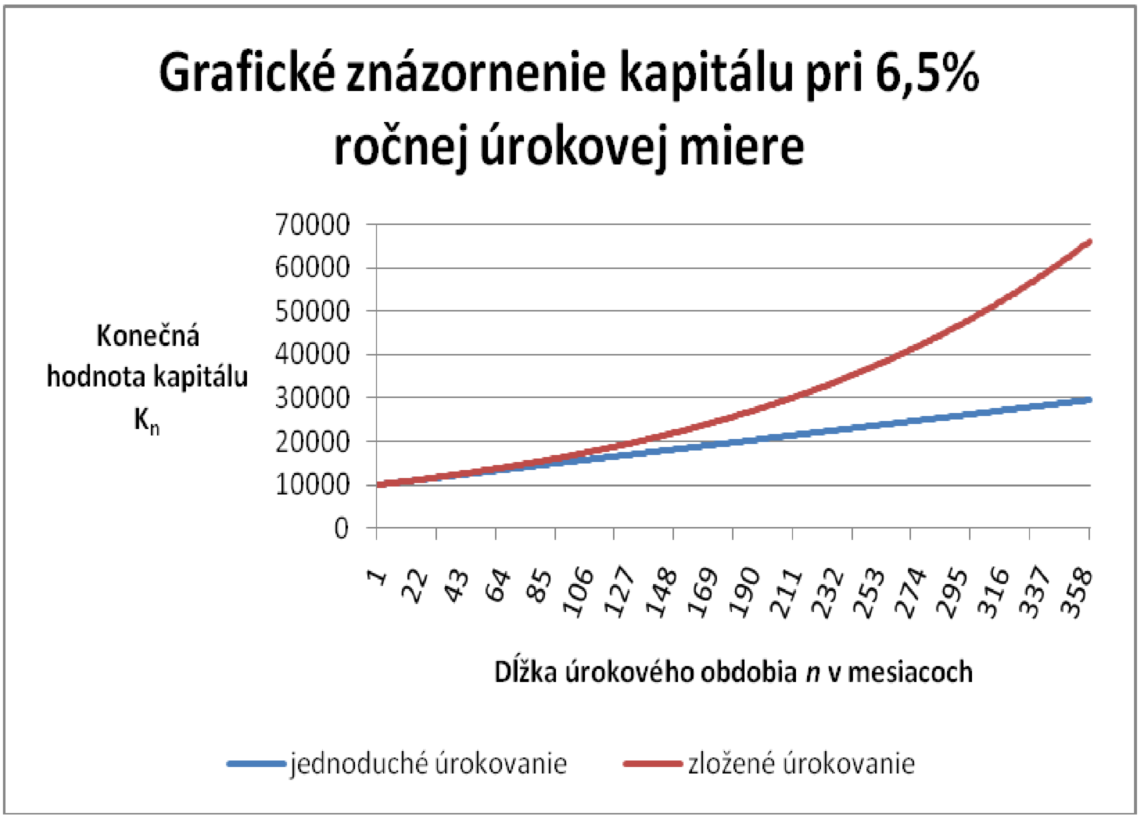
$K_n = 10000 \cdot (1 + 0{,}065 \cdot n)$

$K_n = 10000 \cdot (1 + 0{,}065)^n$

Pričom dĺžka úrokového obdobia $n = \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; 1; 2; 5; 10; 15; 30.$

Tab. 5 Nárast konečnej hodnoty kapitálu pri p=6,5% p.a.

n – dĺžka úrokového obdobia	Konečná hodnota kapitálu K_n		Zložené - Jednoduché
	Jednoduché úrokovanie	Zložené úrokovanie	
$\frac{1}{4}$ roka	10162,50	10158,68	-3,82
$\frac{1}{2}$ roka	10325,00	10319,88	-5,12
1 rok	10650,00	10650,00	0,00
2 roky	11300,00	11342,25	42,25
5 rokov	13250,00	13700,87	450,87
10 rokov	16500,00	18771,37	2271,37
15 rokov	19750,00	25718,41	5968,41
30 rokov	29500,00	66143,66	36643,66



Obr. 12 Grafické zobrazenie nárastu kapitálu pri 6,5% ročnej úrokovej miere

6. Riešenie:

Nájdite konečnú hodnotu kapitálu 10000 eur po n rokoch, vloženého do banky, ktorá poskytuje 8% ročnú úrokovú mieru.

$K_0 = 10000$

$i = 0{,}08$

Podľa vzorcov pre výpočet konečnej hodnoty kapitálu pre jednoduché a zložené úrokovanie sme dostali:

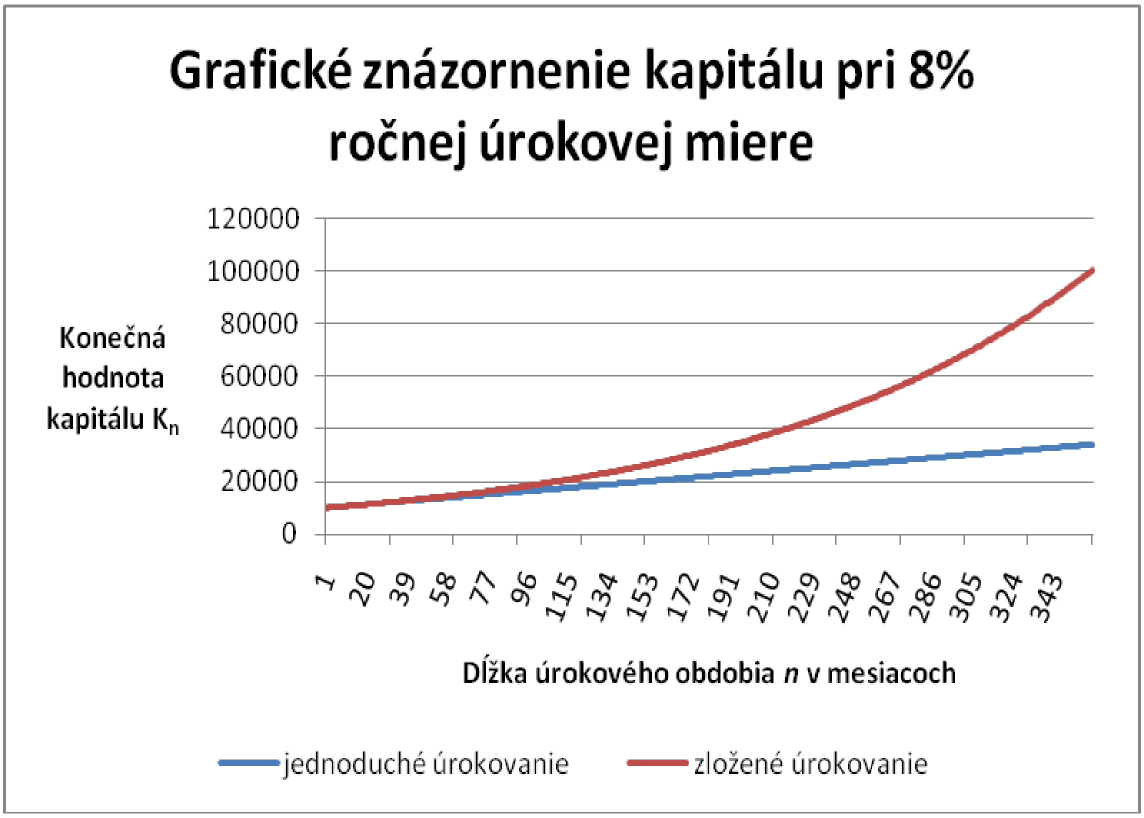
$K_n = 10000 \cdot (1 + 0{,}08 \cdot n)$

$K_n = 10000 \cdot (1 + 0{,}08)^n$

Pričom dĺžka úrokového obdobia $n = \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; 1; 2; 5; 10; 15; 30.$

Tab. 6 Nárast konečnej hodnoty kapitálu pri p=8% p.a.

n – dĺžka úrokového obdobia	Konečná hodnota kapitálu K_n		Zložené - Jednoduché
	Jednoduché úrokovanie	Zložené úrokovanie	
$\frac{1}{4}$ roka	10200,00	10194,27	-5,73
$\frac{1}{2}$ roka	10400,00	10392,30	-7,70
1 rok	10800,00	10800,00	0,00
2 roky	11600,00	11664,00	64,00
5 rokov	14000,00	14693,28	693,28
10 rokov	18000,00	21589,25	3589,25
15 rokov	22000,00	31721,69	9721,69
30 rokov	34000,00	100626,57	66626,57



Obr. 13 Grafické zobrazenie nárastu kapitálu pri 8% ročnej úrokovej miere

7. Riešenie:

Nájdite konečnú hodnotu kapitálu 10000 eur po n rokoch, vloženého do banky, ktorá poskytuje 10% ročnú úrokovú mieru.

$K_0 = 10000$

$i = 0{,}1$

Podľa vzorcov pre výpočet konečnej hodnoty kapitálu pre jednoduché a zložené úrokovanie sme dostali:

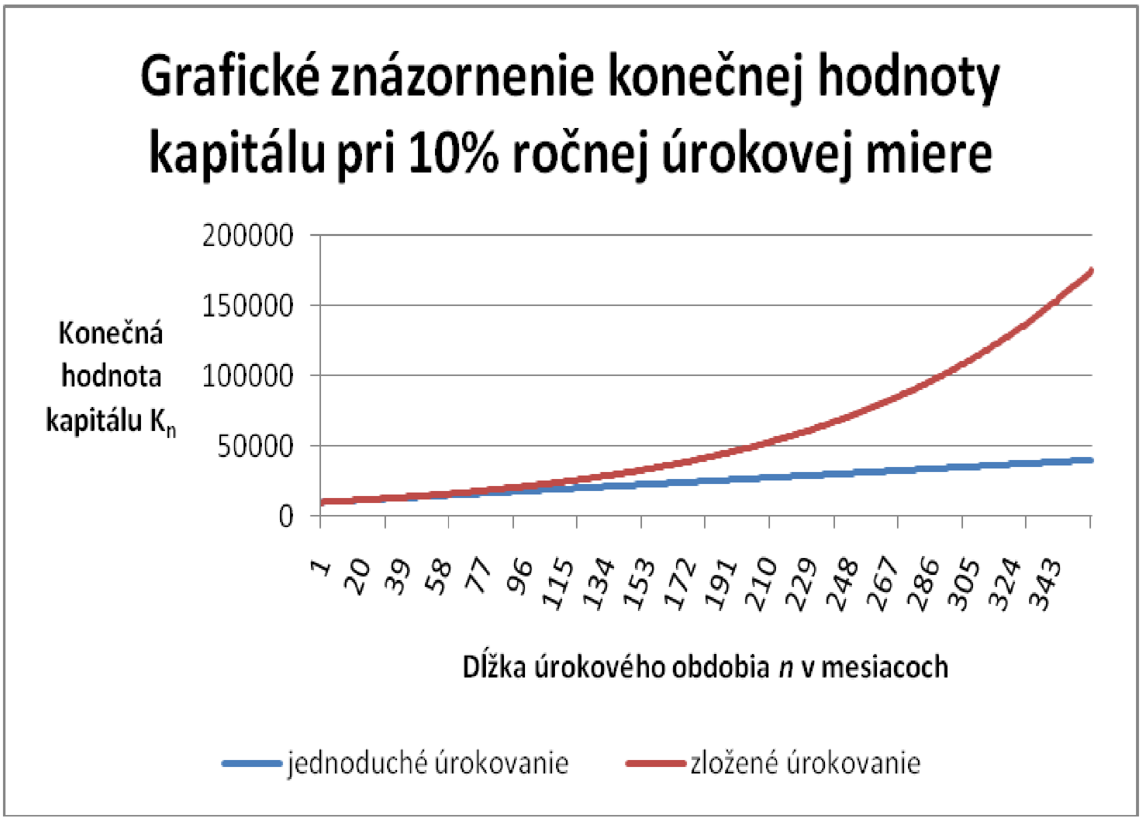
$K_n = 10000 \cdot (1 + 0{,}1 \cdot n)$

$K_n = 10000 \cdot (1 + 0{,}1)^n$

Pričom dĺžka úrokového obdobia $n = \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; 1; 2; 5; 10; 15; 30.$

Tab. 7 Nárast konečnej hodnoty kapitálu pri p=10% p.a.

n – dĺžka úrokového obdobia	Konečná hodnota kapitálu K_n		Zložené - Jednoduché
	Jednoduché úrokovanie	Zložené úrokovanie	
$\frac{1}{4}$ roka	10250,00	10241,14	-8,86
$\frac{1}{2}$ roka	10500,00	10488,09	-11,91
1 rok	11000,00	11000,00	0,00
2 roky	12000,00	12100,00	100,00
5 rokov	15000,00	16105,10	1105,10
10 rokov	20000,00	25937,42	5937,42
15 rokov	25000,00	41772,48	16772,48
30 rokov	40000,00	174494,02	134494,02



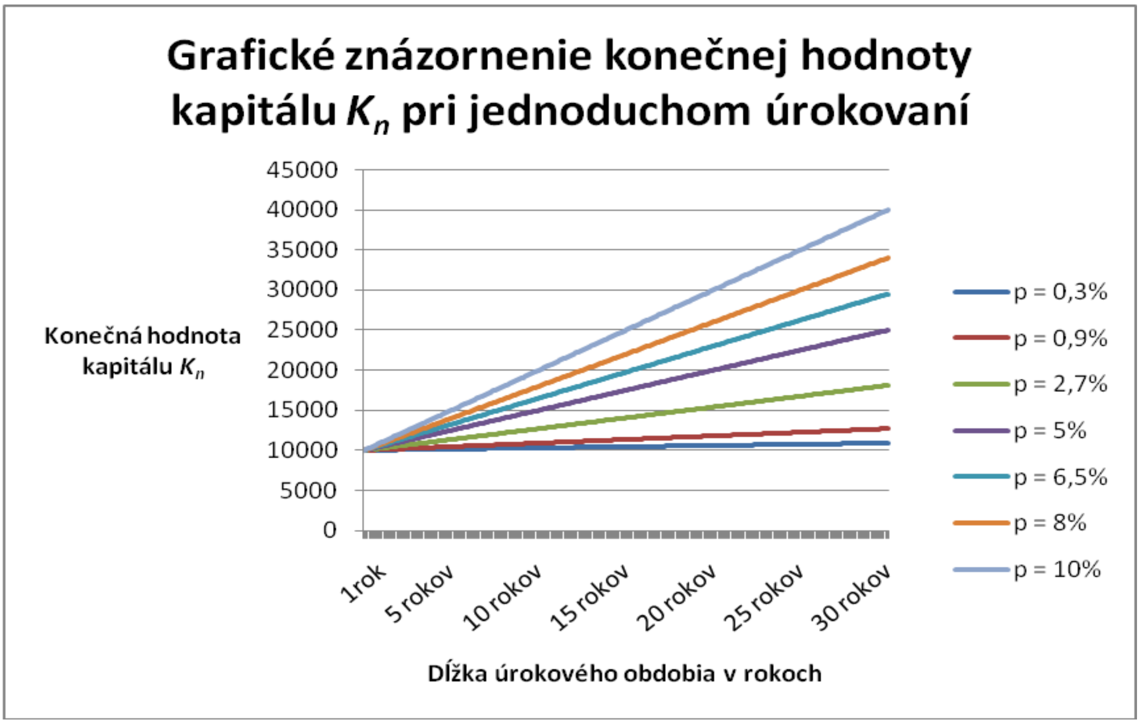
Obr. 14 Grafické zobrazenie nárastu kapitálu pri 10% ročnej úrokovej miere

Z grafov je zrejme, že rozdiel medzi jednoduchým a zloženým úrokovaním sa prejaví tým viac, čím je úrokové obdobie dlhšie.

Nakoniec si všetky riešenia zhrnieme do jedného grafu podľa typu úrokovania.

Tab. 8 Nárast konečnej hodnoty kapitálu pri použití jednoduchého úrokovania pri rôznych úrokových mierach

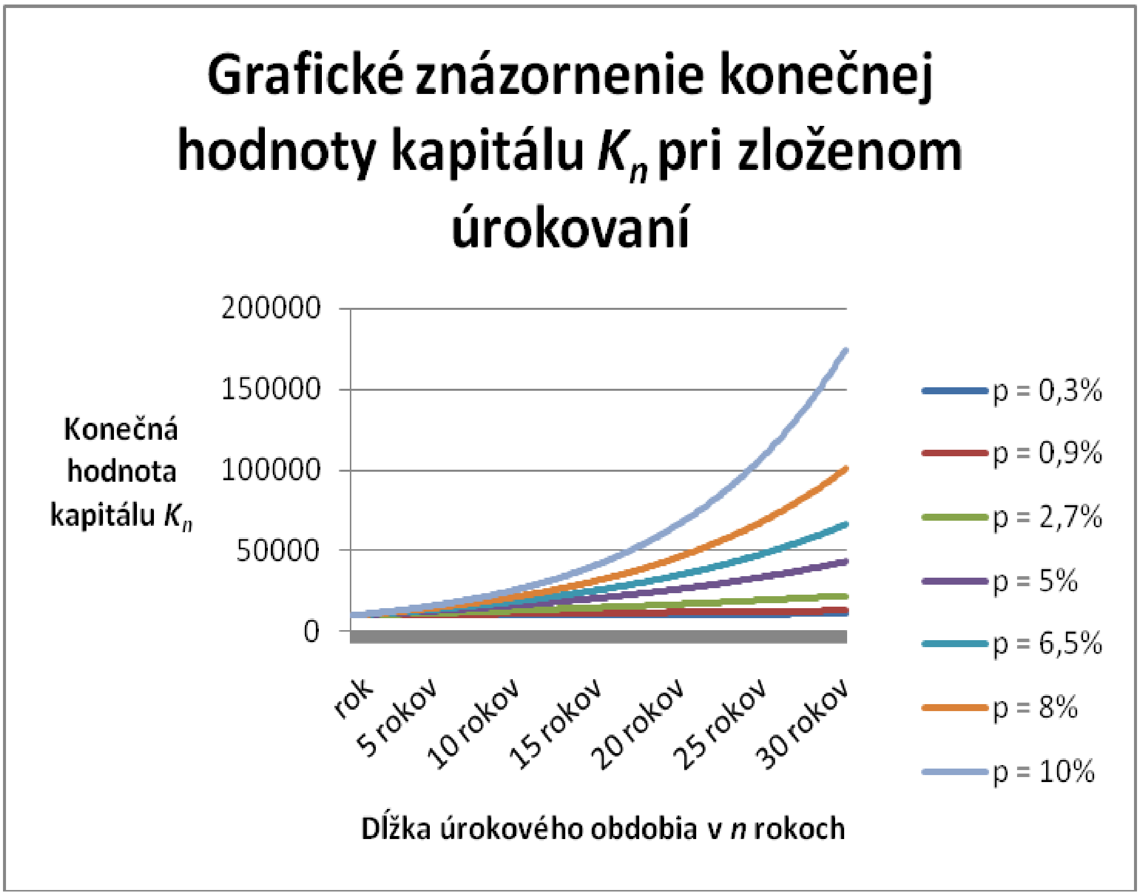
Úrokové obdobie	Výpočet konečnej hodnoty kapitálu pri použití jednoduchého úrokovania pri rôznych úrokových mierach						
	p = 0,3%	p = 0,9%	p = 2,7%	p = 5%	p = 6,5%	p = 8%	p = 10%
0,25	10007,5	10022,5	10067,5	10125	10162,5	10200	10250
0,5	10015	10045	10135	10250	10325	10400	10500
1	10030	10090	10270	10500	10650	10800	11000
2	10060	10180	10540	11000	11300	11600	12000
5	10150	10450	11350	12500	13250	14000	15000
10	10300	10900	12700	15000	16500	18000	20000
15	10450	11350	14050	17500	19750	22000	25000
30	10900	12700	18100	25000	29500	34000	40000



Obr. 15 Grafické zobrazenie nárastu kapitálu pre jednoduché úrokovanie pri rôznych úrokových mierach

Tab. 9 Nárast konečnej hodnoty kapitálu pri použití jednoduchého úrokovania pri rôznych úrokových mierach

Úrokové obdobie	Výpočet konečnej hodnoty kapitálu pri použití zloženého úrokovania pri rôznych úrokových mierach						
	p = 0,3%	p = 0,9%	p = 2,7%	p = 5%	p = 6,5%	p = 8%	p = 10%
0,25	10007,49	10022,42	10066,83	10158,68	10158,68	10194,27	10241,14
0,5	10014,99	10044,9	10134,1	10319,88	10319,88	10392,3	10488,09
1	10030	10090	10270	10650	10650	10800	11000
2	10060,09	10180,81	10547,29	11342,25	11342,25	11664	12100
5	10150,9	10458,17	11424,9	13700,87	13700,87	14693,28	16105,1
10	10304,08	10937,34	13052,82	18771,37	18771,37	21589,25	25937,42
15	10459,57	11438,46	14912,71	25718,41	25718,41	31721,69	41772,48
30	10940,27	13083,83	22238,9	66143,66	66143,66	100626,6	174494

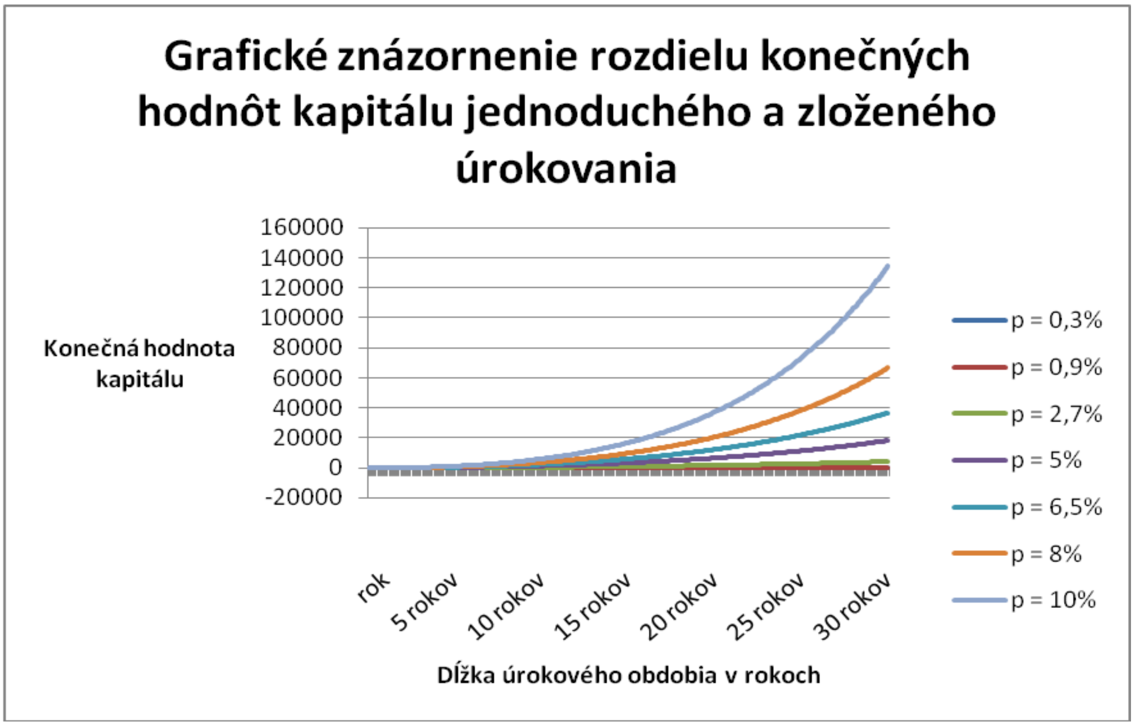


Obr. 16 Grafické zobrazenie nárastu kapitálu pre zložené úrokovanie pri rôznych úrokových mierach

Pre číselné porovnanie jednoduchého a zloženého úrokovania sme si vypočítali rozdiel konečných hodnôt kapitálu. Všetky interpretácie grafov sú uvedené v závere.

Tab. 10 Rozdiel výpočtu konečnej hodnoty kapitálu jednoduchého a zloženého úrokovania pri rôznych úrokových mierach

Úrokové obdobie	Rozdiel výpočtu konečnej hodnoty kapitálu jednoduchého a zloženého úrokovania pri rôznych úrokových mierach						
	p = 0,3%	p = 0,9%	p = 2,7%	p = 5%	p = 6,5%	p = 8%	p = 10%
0,25	-0,00842	-0,07554	-0,67287	-2,27766	-3,81715	-5,73453	-8,86311
0,5	-0,01123	-0,1008	-0,89915	-3,04923	-5,11628	-7,69515	-11,9115
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0,09	0,81	7,29	25	42,25	64	100
5	0,902704	8,173229	74,89502	262,8156	450,8666	693,2808	1105,1
10	4,082571	37,33873	352,8226	1288,946	2271,375	3589,25	5937,425
15	9,573963	88,45831	862,7128	3289,282	5968,41	9721,691	16772,48
30	40,26875	383,8328	4138,9	18219,42	36643,66	66626,57	134494



Obr. 17 Grafické znázornenie rozdielu konečných hodnôt kapitálu jednoduchého a zloženého úrokovania

5 Záver

Bakalárska práca sa zaoberala porovnávaním rôznych typov úrokovania z grafického hľadiska. Porovnávali sme jednoduché a zložené úrokovanie. Cieľom našej práce bolo vypočítať konečné hodnoty kapitálu pre jednoduché a pre zložené úrokovanie pri rôznych úrokových mierach v závislosti od doby úrokovania.

Na začiatku práce sme sa zaoberali analýzou typov úrokovania, charakteristikou funkcií, ich popisov a grafov. Lineárna a exponenciálna funkcia sú elementárne funkcie, prostredníctvom ktorých sme zobrazovali konečné hodnoty kapitálu pre jednoduché a zložené úrokovanie.

Vo vlastnej práci sú popísané základné pojmy, ktorými sme sa zaoberali. Hlavnou časťou vlastnej práce je modelový príklad, ktorý nám poukazuje na to ako sa mení krivka jednoduchého a zloženého úrokovania pri rôznych úrokových sadzbách v závislosti od času. Porovnávaním jednotlivých typov úrokovania, ktoré sú pre lepšiu názornosť doplnené tabuľkami a grafmi, sme chceli poukázať na ich diferencovanosť.

Úrokové miery, ktoré sme si zvolili v modelovom príklade nezodpovedajú reálnym úrokovým mieram. Pre lepšiu názornosť sme si zvolili rozličné úrokové miery: 0,3%, 0,9%, 2,7%, 5%, 6,5%, 8%, 10%. Taktiež sme si zvolili úrokové obdobie: 3 mesiace, pol rok, 1 rok, 2 roky, 5 rokov, 10 rokov, 15 rokov, 30 rokov.

Pre lepšie zobrazenie kriviek úrokovania, sme na vytvorenie grafov počítali konečnú hodnotu kapitálu za každý mesiac. Grafy sme tvorili v Exceli a počítali sme dobu úrokovania za 360 mesiacov. Keďže je to veľmi obšírne, tak v našej práci uvádzame len niektoré obdobia pre lepšiu prehľadnosť.

Modelový príklad sme si rozdelili na sedem riešení. Každé riešenie sa líši výškou úrokovej miery. Počítali sme budúcu hodnotu kapitálu pre vklad vo výške 10000 eur. Pri každom riešení sme si zostavili prehľadnú tabuľku a graf. Každá tabuľka obsahuje dĺžku úrokového obdobia a pre každé obdobie je vypočítaná konečná hodnota kapitálu pre jednoduché aj zložené úrokovanie. Tabuľka obsahuje aj numerický rozdiel medzi konečnou hodnotou kapitálu medzi týmito dvoma typmi úrokovania (Tab. 11).

V prvom riešení vklad vo výške 10000 eur pri ročnej úrokovej miere 0,3% vzrástol jednoduchým úrokovaním za tri mesiace o 7,50 eur, za polrok o 15 eur a každoročne o 30 eur a za tridsať rokov vzrástol kapitál o 900 eur (Tab. 1)

Pri zloženom úrokovaní sa zvýšil počiatočný kapitál za tri mesiace o 7,49 eur a za polrok o 14,99 eur, čo predstavuje menší úrok ako pri jednoduchom úrokovaní. Za jeden rok sa počiatočný kapitál zvýšil rovnako ako pri jednoduchom úrokovaní o 30 eur, a za každý ďalší rok sa počiatočný kapitál zvýšil viac ako pri jednoduchom úrokovaní. Za tridsať rokov narástol kapitál o 940,27 eur, čo predstavuje rozdiel o 40,27 eur ako nárast kapitálu za tridsať rokov pri jednoduchom úrokovaní.

Záporný rozdiel konečných hodnôt kapitálu pri jednoduchom a zloženom úrokovaní nastáva pri dĺžke úrokového obdobia za 3 mesiace a polrok, v prvom roku nedochádza k žiadnej zmene, to znamená, že počiatočný kapitál sa nám zúročí o 30 eur pri jednoduchom úrokovaní tak aj pri zloženom úrokovaní. V tomto prípade je jedno ktorý typ úrokovania si vyberieme. Kladný rozdiel nastáva po dvoch rokoch úrokovania kapitálu (Tab. 1). Pod tabuľkou máme graficky znázornené jednoduché a zložené úrokovanie (Obr. 8). Z grafu možno vidieť, že pri zvyšovaní sa dĺžky úrokového obdobia, graf zloženého úrokovania mierne presahuje graf jednoduchého úrokovania.

V druhom riešení pri jednoduchom úrokovaní sa zvýšil počiatočný kapitál tri mesiace o 22,50 eur a za polrok o 45 eur, čo predstavuje väčší úrok ako pri zloženom úrokovaní. Za jeden rok sa kapitál zvýšil rovnako pri oboch typoch o 45 eur čo je viac ako v prvom prípade. Z Tab.2 je vidieť, že za tridsať rokov sa zhodnotil kapitál o 2700 eur pri jednoduchom a o 3083,83 eur pri zloženom úrokovaní, čo predstavuje rozdiel 383,83 eur. Exponenciálna krivka zloženého úrokovania po prvom roku pri 0,9% ročnej úrokovej miere nepatrne prevyšuje lineárnu priamku jednoduchého úrokovania (Obr. 9).

V treťom riešení sme zhodnocovali kapitál pri 2,7 % ročnej úrokovej miere, čiže úroková sadzba je vyššia ako 1%. Pri úrokovom období menej ako jeden rok nám predstavuje záporný rozdiel medzi zloženým a jednoduchým úrokovaním. Za tridsať rokov nám vzrastie úrok pri jednoduchom úrokovaní o 8100 eur a pri zloženom úrokovaní o 12238,9 eur , a rozdiel medzi nimi je 4138,9 eur (Tab. 3), čo predstavuje vyššiu hodnotu ako pri prvých dvoch prípadoch. Na Obr. 10 už vidíme ako nám rastie exponenciálna krivka a pomaly sa nám vzďaľuje od lineárnej priamky. Už pri tomto grafe môžeme tvrdiť, že čím je úroková miera vyššia, tým viac sa krivka jednoduchého a zloženého úrokovania od seba vzďaľujú. Možno konštatovať, že ak je doba úrokovania dlhšia ako jeden rok, pri úrokovej miere 2,7% je výhodnejšie pre spotrebiteľa pre zhodnotenie svojho vkladu využiť zložené úrokovanie.

V ďalších troch riešeniach pri výpočte konečnej hodnoty vkladu pri úrokových mierach 5% (Obr. 11), 6,5% (Obr. 12), 8% (Obr. 13) vidíme na grafoch ako sa nám výrazne javí rozdiel medzi lineárnou a exponenciálnou krivkou. Čím vyššia je úroková miera v závislosti od úrokového obdobia, tým viac sa krivky od seba odchyľujú. Pri 8% úrokovej miere je exponenciálna krivka viac zaoblenejšia ako pri úrokovej sadzbe 5%. Po tridsiatich rokoch úročenia vkladu pri 5% úrokovej miere je rozdiel typov úrokovania 18219,42 eur (Tab. 4), pri 6,5% úrokovej miere 36643,66 eur (Tab. 5) a pri 8% úrokovej miere je opäť kladný rozdiel 66626,57 eur (Tab. 6). Tento rozdiel je v porovnaní z predchádzajúcimi oveľa vyšší, čo je vidieť aj z grafov (Obr. 11, Obr. 12, Obr. 13).

Pri poslednom riešení sme zvolili 10% úrokovú mieru, čo je dosť vysoká a v bankovej praxi málo pravdepodobná úroková miera. Ako vidieť z Tab. 7, vklad po troch mesiacoch sa nám zhodnotil o 250 eur pri jednoduchom úrokovaní a o 241,14 eur pri zloženom úrokovaní. V tomto prípade sa nám javí záporný rozdiel medzi týmito typmi úrokovania čo predstavuje 8,86 eur. Taktiež aj za polrok sa nám javí záporný rozdiel 11,91 eur. V týchto prípadoch, ak chce majiteľ vkladu vložiť kapitál na obdobie 3 mesiace alebo polrok, resp. obdobie menšie ako jeden rok, je pre neho efektívnejšie ak si zvolí jednoduché úročenie. Pri dobe úrokovania jeden rok je pri 10% ročnej úrokovej miere rovnaký úrok pri obidvoch typoch úrokovania. Každým ďalším rokom pri jednoduchom úrokovaní sa rastie úrok o 500 eur a za tridsať rokov by sme dostali úrok v hodnote 30000 eur. Pri zloženom úrokovaní nám za rok narastie úrok v hodnote 1000 eur, za dva roky o 2100 eur a každým rokom nám úrok rastie viac ako pri jednoduchom úrokovaní. Za tridsať rokov pri 10% ročnej úrokovej miere z vkladu 10000 eur predstavuje úrok 164494,02 eur (Tab. 7), čo je už oveľa viac ako pri jednoduchom úrokovaní. Za tridsať rokov rozdiel predstavuje 134494,02 eur, čo je v bežnej realite málo pravdepodobné. Z grafu jasne vidíme ako nám výrazne rastie krivka exponenciálnej funkcie v závislosti od úrokového obdobia (Obr. 14). Pre lepšie znázornenie sme si zvolili dobu úrokovania v mesiacoch a preto aj naše grafy obsahujú údaje za 360 mesiacov.

Nakoniec sme si zhrnuli výpočty konečnej hodnoty kapitálu pre jednotlivé typy úrokovania. V Tab. 8 je vidieť, ako nám narastá hodnota vloženého kapitálu pri použití jednoduchého úrokovania pri rôznych úrokových mierach, ktoré sme si sami stanovili. Vidíme, že pri najvyššom úrokovom období a najvyššej úrokovej miere bude kapitál najväčší. Táto situácia je graficky vyobrazená na Obr. 15. Z obrázku je zrejmé, že lineárna priamka jednoduchého úrokovania je pri 10% úrokovej miere najstrmejšia a pri úrokovej miere 0,3% sa lineárna krivka najviac blíži k osi x. To znamená, že úrok bude tým väčší, čím viac je krivka strmšia. To isté platí aj pri zloženom úrokovaní (Obr. 16). Ak porovnáme Tab. 8 a Tab. 9, zistíme, pri dobe úrokovania viac ako jeden rok, je rozdiel medzi jednoduchým a zloženým úrokovaním výrazne odlišný. Ak si porovnáme hodnoty pri úrokovej miere 10% a dobe úrokovania 30 rokov, vidíme, že pri jednoduchom úrokovaní predstavuje hodnotu 40000 eur a pri zloženom úrokovaní 174494 eur. V Tab. 11 máme vypočítaný rozdiel jednoduchého a zloženého úrokovania. V tomto prípade to predstavuje rozdiel 134494 eur, čo je značne veľký. Majiteľ vkladu v tomto prípade by ani nemal uvažovať, ktorý typ úrokovania si vybrať, bez rozmýšľania by sa mal rozhodnúť pre zložené úrokovanie. Obr. 17 zobrazuje rozdiel konečných hodnôt. Z grafu možno vyčítať, že najväčšie rozdiely medzi jednoduchým a zloženým úrokovaním budú pri vyšších úrokových mierach .

Ciele bakalárskej práce boli splnené. Zo zostavených grafov a aj výpočtov je zrejmé, že pri úrokovacom období kratšom ako je úroková perióda, pre ktorú je stanovená úroková miera, je výhodnejšie pre majiteľa vkladu použiť jednoduché úrokovanie, zatiaľ čo pri období dlhšom je výhodnejšie použiť zložené úrokovanie. Tak sa to aj v bežnej bankovej praxi robí. Z výsledkov nám vyplýva, že pri vkladaní kapitálu je veľmi podstatné pre zákazníka poznať podmienky, ktoré nám poskytuje banka. Precízne preštudovanie bankových služieb umožní majiteľovi vkladu lepšie sa rozhodnúť pre tie podmienky vkladu finančného kapitálu, ktoré najefektívnejšie zhodnotia jeho vložený kapitál.

Zoznam použitej literatúry

1. HUŤKA, Vladimír – PELLER, František. 2010. *Finančná matematika v Exceli.* 5. vyd. Bratislava : Iura Edition, 2010. 192 s. ISBN 978-80-8078-320-4.
2. HUŤKA, Vladimír - PELLER, František. 2004. *Finančná matematika v Exceli*. 3.vyd. Bratislava: Iura edition. 2004. 192 s. ISBN 80-8078-003-X
3. HUŤKA, Vladimír – INSTITORIS, Juraj – MOJŽIŠOVÁ, Elena. 1997. *Finančná matematika 1*. Bratislava : EKONÓM. 1997. 185 S. ISBN 80-225-0853-5.
4. BEŇOVÁ, Elena a i. 2005. *Financie a mena.* Bratislava : Iura Edition, 2005. 373 s. ISBN 978-80-8078-431-5.
5. CIPRA, Tomáš. 2006. *Praktický průvodce finanční a poistnou matematikou.* 2. Vyd. Praha: EKOPRESS, 2005. 308s. ISBN 80-86119-91-2.
6. GALLO, Pavol. 1995. *Základy moderného bankovníctva.* 1. vyd. Bratislava : ELITA, 1995. 174 s. ISBN 80-85323-89-3.
7. MANKIW, N. Gregory. 1999. *Zásady ekonómie*. Praha: GRADA Publishing, 1999. 736s. ISBN 80-7169-891-1.
8. MATEJDES, Milan. 2005. *Aplikovaná matematika.* 1. vyd. Zvolen: MATCENTRUM, 2005. 556 s. ISBN :80-89077-01-3.
9. NEMĚC, Vladimír. 1995. *Ekonomika výrobních zivností a malých podniků*. 1. vyd. Praha : VICTORIA PUBLISHING, 1995. 140 s. ISBN 80-85865-57-2.
10. ORSZÁGHOVÁ, Dana a i. 2008. *Matematika a jej aplikácie.* 1. vyd. Nitra : SPU, 2008. 343 s. ISBN 978-80-552-0126-9.
11. ORSZÁGOVÁ, Dana – FARKAŠOVÁ, Mária – GREGÁŇOVÁ, Radomíra a iní. 2006. *Matematika a jej aplikácie v obchodných činnostiach.* 1. vyd. Nitra: SPU, 2006. 143 s. ISBN 80-8069-757-4.
12. RADOVÁ, Jarmila – DVOŘÁK, Petr, 1997. *Finančná matematika pro každého*. 1. vyd. Praha : GRADA, 1997. 223 s. ISBN 80-7169-348-0.
13. RADOVÁ, Jarmila – DVOŘÁK, Petr – MÁLEK, Jiří. 2009. *Finančná matematika pro každého*. 7. vyd. Praha : GRADA, 2009. 296 s. ISBN 978-80-247-3291-6.
14. RADOVÁ, Jarmila – DVOŘÁK, Petr – MÁLEK, Jiří. 2001. *Finančná matematika pro každého.* 3. Vyd. Praha : GRADA, 2001. 264 s. ISBN 80-247-9015-7.
15. REVENDA, Zbyněk. 2005. *Peněžní ekonomie a bankovníctví*. 4.vyd. Praha: MANAGMENT PRESS, 2005. 627s. ISBN 80-7261-132-1.

16. HARSHBARGER, Ronald J. – REYNOLDS, James J. 1989. *Mathematical applications for managment, life, and social sciences.*3-rd ed. Lexington, D. C. Heath and Co. 1989. 746 s. ISBN 0-669-16263-9.
17. SAMUELSON, Paul A. – NORDHAUS, William D. 1992. *Ekonómia I.* 13. vyd. Bratislava : Medzinárodná účastinná spoločnosť BRADALO, 1992. 419 s. ISBN 978-80-7127-029-6.
18. SERENČÉŠ, Peter. 2006. *Financie a mena*. 1. vyd. Nitra : SPU, 2006. 151 s. ISBN 80-8069-768-X.
19. ŠENKÝŘOVÁ, Bohuslava a i. 1997. *Bankovnictví I.* 1. vyd. Praha : Grada, 1997. 262 s. ISBN 80-7169-464-9.
20. TRENČIANSKA, Anna a i. 2006. *Základy vyššej matematiky.* 2. vyd. Nitra : SPU, 2006. 142 s. ISBN 80-8069-765-5.
21. WIKIPÉDIA - Slobodná encyklopédia. 2001 [online] : Úrok, aktualizované 2010. [cit. 2010-09-22]. Dostupné na: < http://sk.wikipedia.org/wiki/urok>.

.