SLOVENSKÁ POĽNOHOSPODÁRSKA UNIVERZITA

v NITRE

TECHNICKÁ FAKULTA

1130568

HRANOLOVÉ A VALCOVÉ PLOCHY A ICH MODELOVANIE PRE PRAKTICKÉ ÚČELY

Nitra 2011 **Štefan Judin**

SLOVENSKÁ POĽNOHOSPODÁRSKA UNIVERZITA

v NITRE

TECHNICKÁ FAKULTA

HRANOLOVÉ A VALCOVÉ PLOCHY A ICH MODELOVANIE PRE PRAKTICKÉ ÚČELY

Bakalárska práca

Študijný program:	Prevádzková bezpečnosť techniky
Študijný odbor:	2368700 Kvalita Produkcie
Školiace pracovisko:	Katedra stavieb
Školiteľ:	Ing. Dušan Páleš, CSc

Nitra 2011 **Štefan Judin**

Čestné vyhlásenie

Podpísaný Štefan Judin vyhlasujem, že som záverečnú prácu na tému „Hranolové a valcové plochy a ich modelovanie pre praktické účely“ vypracoval samostatne s použitím uvedenej literatúry.

Som si vedomý zákonných dôsledkov v prípade, ak uvedené údaje nie sú pravdivé.

V Nitre 15. marca 2011

....

Štefan Judin

Abstrakt

V bakalárskej práci sme zhromaždili poznatky z deskriptívnej geometrie obsiahnuté v prehľade literatúry, kde sme charakterizovali hranolové a valcové plochy, ich rozdelenie a zobrazenie v karteziánskej sústave. Cieľom vlastnej práce bolo modelovať hranolové a valcové plochy pomocou ich parametrického vyjadrenia a popísať ich praktické využitie. Matematické modely sú nevyhnutné pri automatizácií výroby. Pomocou parametrického vyjadrenia plôch môžeme vylúčiť nepresnosti vzniknuté pri rysovaní a je vhodné pre štúdium ich geometrických vlastností. Na modelovanie sme použili program Microsoft Mathematics 4.0. Na základe modelovania zobrazenej v časti Výsledky práce môžeme vidieť, ako sa zmenou hodnôt premenných „a“ a „b mení tvar valcovej plochy. Konkrétne je zmena tvaru znázornená na hyperbolickej valcovej ploche.

Abstract

In the Bachelor thesis we have collected knowledge of descriptive geometry contained in the literature review, where we describe the prismatic and cylindrical surfaces, their division and visual display in the Cartesian system. The aim of our own work was to model prismatic and cylindrical surfaces using their parametric representations and describe their practical use. Mathematical models are essential for the automation of production. Using parametric representations of areas we can eliminate uncertainties arising from the drawing and is suitable for the study of their geometric properties. For modeling we used Microsoft Mathematics 4.0. On the basis of modeling shown in the part Results of the work we can see how the change of the values of variables '"a" and "b", is changing the shape of a cylindrical surface. Specifically, the change of the shape is shown in hyperbolic cylindrical surface.

OBSAH

Úvod

Valcové a hranolové plochy majú veľké využitie v stavebnom odvetví pri stavbe klenieb, viaduktov. Taktiež nájdeme ich využitie v priemyselnom odvetví a v podstate všade tam, kde potrebujeme vytvoriť produkty v tvare týchto plôch.

Úlohou bakalárskej práce je analyzovať poznatky z deskriptívnej geometrie, konkrétne poznatky o hranolových a valcových plochách. Určenie typu, tvaru a zobrazenie plôch prispeli k zlepšeniu práce týkajúce sa technického kreslenia. Pri samotnom rysovaní je tendencia vzniku nepresností zapríčinená ľudským faktorom či rysovacími pomôckami. Z tohto hľadiska je nevyhnutné zobrazenie týchto plôch prostredníctvom počítača resp. počítačových programov. Tie na svoju činnosť využívajú práve matematický model týchto plôch, ktorým sa budeme zaoberať v bakalárskej práci v časti Výsledky práce. Pomocou nich môžeme „namodelovať“ príslušnú plochu, kde pomocou zmeny parametrov v matematickom modeli meníme (modelujeme) tvar príslušnej plochy. Matematický model je nevyhnutný pri súčasnej automatizácií výroby.

V úvode práce sa zameriame na všeobecný popis plôch a ich klasifikáciu. Zo všeobecného opisu prejdeme k podrobnejšiemu popisu k zadaným valcovým, hranolovým plochám. Nakoniec sa v prehľade danej problematiky dostaneme k tvorbe a popisu základných vzťahov pri generovaní daných plôch.

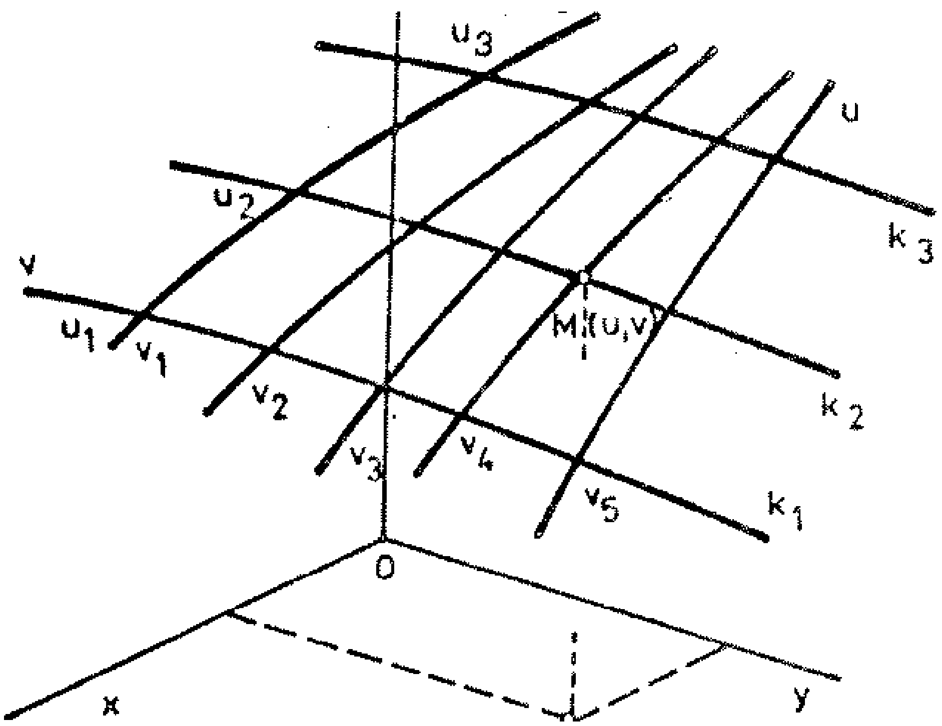
1 Prehľad riešenej problematiky

Na úvod práce rozoberieme základné pojmy týkajúce sa témy práce. Vysvetlíme základné prvky, s ktorými budeme pracovať pri modelovaní hranolových a valcových plôch.

1.1 Plochy - charakteristika

V technickej literatúre sa plocha spravidla definuje pomocou spojitého pohybu určitej tvoriacej krivky. Podľa Palajovej (1997) možno plochu formulovať nasledovne. Vzniká spojitým pohybom krivky (čiary alebo priamky), ktorá nie je trajektóriou pohybu. Pritom sa tvar krivky behom pohybu zachováva alebo môže sa i meniť. Túto pohybujúcu sa krivku nazývame *tvoriacou krivkou* plochy (obr.1).

Palajová ďalej charakterizuje plochu ako nekonečnú množinu kriviek $\mathbf{k_1}$, $\mathbf{k_2}$,..., $\mathbf{k_n}$. závislých na jednom parametri **u**, keďže táto množina tvoriacich kriviek pohybujúcej sa premennej krivky odpovedá postupne hodnotám $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$,..., $\mathbf{u_n}$ parametra **u**.



Obr.1 Tvorba plochy

Zdroj: Helena Palajová (1999)

Každá z tvoriacich kriviek $\mathbf{k_1}$, $\mathbf{k_2}$,..., $\mathbf{k_n}$ je však „jednoparametrická“ sústava bodov to znamená, že poloha bodu na každej z nich je daná hodnotou ďalšieho parametra **v**. Z toho vyplýva, že plochu je možné považovať za „dvojparametrickú“ množinu bodov v priestore teda poloha bodu na ploche závisí na dvoch na seba nezávislých parametroch.

1.2 Klasifikácia plôch

Z hľadiska výtvarného zákona delíme plochy na:

1) Empirické: plochy, u ktorých nepoznáme podrobne ich výtvarný zákon. Tvoriace krivky sú zadané tabuľkou súradníc z výsledku určitých meraní. Medzi tieto plochy zaraďujeme:
    1) **Topografické plochy:** plochy zemského povrchu (obr.1).
    2) **Grafické plochy:** sú to plochy technickej praxe, kde sú krivky určované požiadavkami, ktoré na plochu kladie jej použitie napríklad plochy lodných trupov, lietadiel, lopatiek turbín, plochy vytvorené pri stavbe vodných diel a pod.
2) Matematické: plochy, ktoré sú vyjadrené matematickými prostriedkami, vhodnými analytickými funkciami dvoch premenných.

Z hľadiska konštruktívneho je možné plochy deliť podľa pohybu, ktoré vykonávajú tvoriace čiary na ploche:

1) Rotačné: ak plocha rotuje okolo pevnej priamky.
2) Translačné: pohyb čiary podrobená takému pohybu, že všetky body na čiare pri tomto pohybe prejdú navzájom zhodné dráhy.
3) Skrutkové: čiara predstavuje skrutkový pohyb.
4) Obalové: sú vytvorené spojitým pohybom plochy, ktorá sa pri pohybe môže i meniť a dotýka sa všetkých polôh jednoparametrickej sústavy plôch vzniknutých spojitým pohybom danej plochy (Palajová 1997).

Podľa typu tvoriacej čiary môžeme ďalej plochy deliť na priamkové a cyklické.

1.2.1 Priamkové plochy

Macková a Zaťková (1985) charakterizujú vznik priamkových plôch pohybom priamky a tvoria jednoparametrickú sústavu priamok v priestore. Ich tvoriacim priamkam hovoríme povrchové priamky, resp. površky. Priamková plocha predstavuje takú plochu, ktorej každým bodom prechádza aspoň jedna priamka ležiaca celá na ploche.

Priamkové plochy rozdeľujeme na dve podstatne odlišná typy:

1) rozvinuteľné
2) nerozvinuteľné

Rozvinuteľné priamkové plochy

Medek, Zámožík (1978) uvádzajú nutnú a postačujúcu podmienku, aby priamková plocha daná rovnicou (1) bola rozvinuteľnou. Musí platiť:

$$[\boldsymbol{r_u}(u), \boldsymbol{a_u}(u), \boldsymbol{a}(u)] = 0 \qquad (1)$$

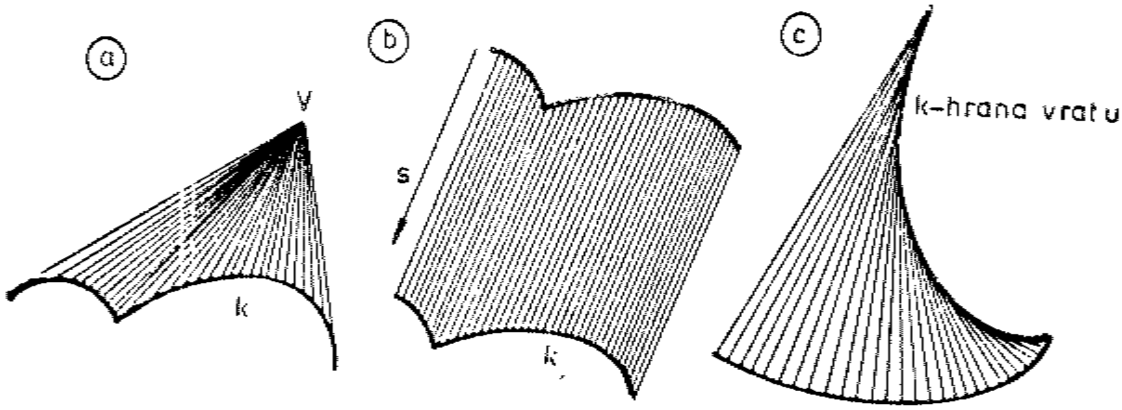
Z rovnice (1) vyplýva, že pre každé *u* má mať plocha jedinú dotykovú rovinu, ktorej plocha nezávisí od parametra *v*, čiže vektory $\boldsymbol{r_u}(u) \times \boldsymbol{a}(u)$ a $\boldsymbol{a_u}(u) \times \boldsymbol{a}(u)$ musia byť lineárne závislé, teda kolmé na ten istý vektor.

Podstatným znakom rozvinuteľných priamkových plôch je to, že pozdĺž každej jej tvoriacej priamky existuje jedna dotyková rovina, resp. v každom bode tej istej tvoriacej priamky existuje jedna a tá istá dotyková rovina, ktorú nazývame torzálnou rovinou a tvoriacu priamku torzálnou priamkou (Helena Palajová 1997).

Medzi rozvinuteľné plochy patria:

1) plochy kužeľové, kde zaraďujeme okrem kruhových kužeľových plôch aj všeobecná kužeľové plochy, ktorých všetky tvoriace priamky pretínajú danú riadiacu krivku a prechádzajú daným bodom (obr.2.a),
2) plochy valcové a hranolové, kde zaraďujeme okrem kruhových valcových plôch aj všeobecná valcové plochy, ktorých všetky tvoriace priamky pretínajú danú riadiacu krivku a sú rovnobežné s danou priamkou (obr.2.b),

3) plochy vytvorené dotyčnicami priestorových kriviek, pričom danú krivku nazývame hrana vratu plochy (obr.2.c)



Obr.2 Rozvinuťelné plochy a) kužeľová b) valcová, hranolová c) vytvorená dotyčnicami
Zdroj: Helena Palajová (1999)

1.2.1.1 Valcová plocha

Vladimír Mařík a Emilie Ryšáňová (1975) popisujú vznik valcovej plochy nahradením riadiaceho mnohouholníka riadiacou krivkou, dostávame *valcovú plochu* ako množinu rovnobežných priamok, ktoré pretínajú danú krivku.

V prípade že riadiaca krivka je kružnica, dostaneme kruhovú valcovú plochu, ako množinu rovnobežných priamok, ktoré pretínajú danú kružnicu. Priamky ktoré plochu vytvorili, sú priamky valcovej plochy. Keď je tvoriaca priamka kolmá k rovine riadiacej kružnice, dostávame kolmú valcovú plochu kruhovú.

Rotačnú valcovú plochu dostaneme rotáciou priamky p okolo osy o, ktorá je s priamkou rovnobežná. Rotačná valcová plocha je kolmá valcová kruhová plocha. Teleso z tejto plochy vzniknuté obmedzením dvoma, obvykle rovnobežnými rovinami nazývame rotačný valec.

Danuša Szokeová (2001) charakterizuje valcovú plochu ako množinu všetkých priamok v smere s, ktoré pretínajú kruh k, sa nazýva valcový priestor. Valec je časť valcového priestoru ohraničená valcovou plochou a rovnobežnými rovinami ^{1}a
a ^{2}a, $^{1}a \parallel {}^{2}a$.

1.2.1.2 Charakteristika pojmov súvisiacich s valcovými plochami

Pojmy valcový priestor, valcová plocha, valec dostaneme z pojmov hranolový priestor, hranolová plocha, hranol tak, že namiesto určujúceho n-uholníka zavedieme určujúcu krivku a všetky jej vnútorné body (ak existujú).

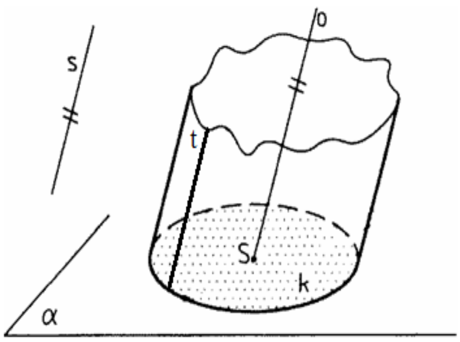
Pojmy tvoriaca priamka, vnútorná priamka, smerová priamka, smerová rovina valcového priestoru (valcovej plochy) majú rovnakú definíciu ako tieto pojmy pre hranolový priestor (hranolovú plochu). (Rudolf Višňovský, Michaela Turčanová 1999)

Prípad, keď určujúci útvar bude kružnica a všetky jej vnútorné body (t.j. kruh, ktorého hranicou je daná kružnica):

Rudolf Višňovský a Michaela Turčanová popisujú: Nech je daný kruh *k* ležiaci v rovine α a priamka *m* rôznobežná s rovinou α , potom:

1) Množina všetkých priamok t, ktoré sú rovnobežné s priamkou s a pretínajú daný kruh *k* tiež jeho vnútorné body sa nazýva **kruhový valcový priestor** (obr.3).
2) Množina všetkých priamok t, ktoré sú rovnobežné s priamkou s a pretínajú hranicu kruhu *k* sa nazýva **kružnicová valcová plocha** idúca do nekonečna (obr.3).

Priamka, ktorá je časťou kruhového valcového priestoru (kružnicovej valcovej plochy) sa nazýva tvoriaca priamka kruhového valcového priestoru.



Obr.3 Valcový priestor, plocha

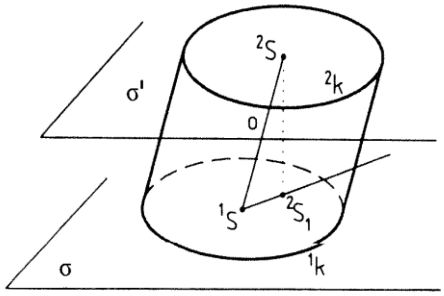
Zdroj: Vlastné spracovanie

Valec je prienik valcového priestoru a priestorové vrstvy určené rovinou a riadiaceho polygonu a roviny σ´ σ (obr.4a). Podstava kruhového valca je prienik kruhového valcového priestoru s rovinou σ (σ'). -Strana kruhového valca je tá časť tvoriacej priamky kruhového valcového priestoru, ktorá patrí kruhovému valcu. Výška kruhového valca je vzdialenosť rovín, v ktorých ležia podstavy kruhového valca. Kruhový valec, ktorého strany sú kolmé na roviny jeho podstáv sa nazýva rotačný valec.

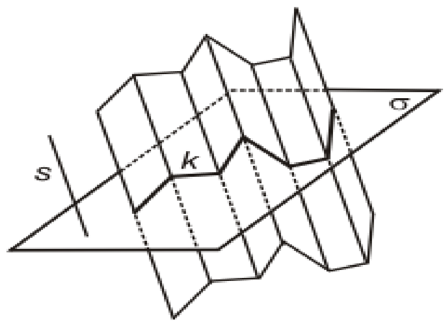
Kruhový valec, ktorý nie je rotačný sa nazýva šikmý (kosý) kruhový valec. Rovnostranný valec je taký rotačný valec, ktorého výška sa rovná priemeru jeho podstavy.

Světlana Tomiczková (2006) udáva že valcová plocha je určená rovinnou krivkou *k* ($k \subset \sigma$) a smerom s, ktorý nenáleží danej rovine ($s \nparallel \sigma$). a je tvorená priamkami, ktoré pretínaní krivku *k* a sú smeru s – (obr.4b).

Ak je krivka *k* uzavretá, potom množina priamok smeru s, ktoré pretínajú krivku alebo prechádzajú vnútorným bodom krivky, sa nazýva valcový priestor. Priamka určená bodom krivky *k* a smeru s je površka. Podobne ako u hranolovej plochy, môžeme v projektivnom rozšírení euklidovského priestoru definovať valcovú plochu ako špeciálny prípad kužeľovej plochy, jej vrcholom je nevlastní bod. Vrcholovou rovinou je každá rovina smeru s.



Obr.4a Valec
Zdroj: Vlastné spracovanie



Obr.4b Riadiaca krivka
Zdroj: Vlastné spracovanie

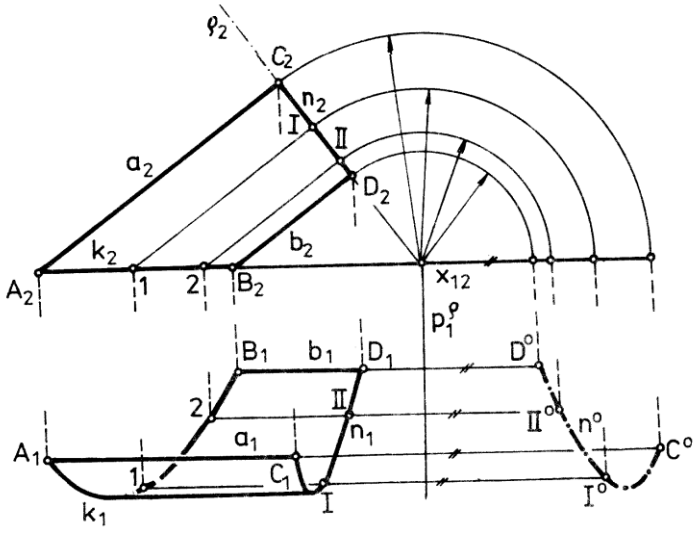
Ak je riadiacou krivkou valcovej plochy regulárna kužeľosečka, získame eliptickú, parabolickú či hyperbolickú valcovú plochu. Ak je touto riadiacou krivkou kružnica, nazýva sa valcová plocha kruhová.

Každá krivka na valcovej alebo kužeľovej ploche môže byť riadiacou krivkou tejto plochy.

Analogicky by sme mohli definovať aj eliptickú, parabolickú, hyperbolickú valcovú plochu (priestor).

1.2.1.3 Rozvinutie valcovej plochy

Jossef Novák, Oldřich Roubek (1989) popisujú rozvinutie valcovej plochy χ, použitím normálneho rezu n, t.j. rez rovinou ρ, kolmú k površkám. Površky a // b //... sa rozvinú do rovnobežiek a^r // b^r //... a pretože površky sú kolmé na rez n, rozvinie do kolmice n^r k priamkam a^r, b^r... Plochu χ rozvinieme približne tak, že rozvinieme náhradnú hranolovú plochu vpísanej plochy χ.

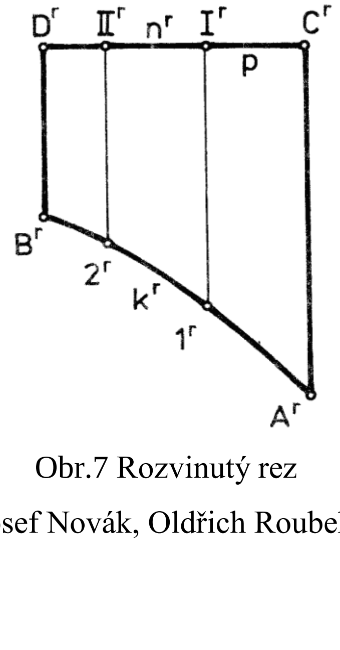


Obr.6 Plášť valca

Zdroj: Jossef Novák, Oldřich Roubek (1989)

Na (obr.6) je plášť valca obmedzený oblúkom AB krivky k ⊂ π, površkami a // b // v, A ∈ a, B ∈ b a normálnym rezom n v rovine ρ⊥v, ρ⊥ a_2. Body C, I, II, D normálneho rezu sú priesečníky površkov vedených bodmi A, 1, 2, B krivky k s rovinou ρ.

Normálny rez n otočíme okolo stopy p^9 do pôdorysu. Otočený rez n^0 prechádza otočenými bodmi C^0, 1^0, II^0, D^0. Na zvolenú priamku p (obr.7) rektifikujeme od zvoleného bodu C^r oblúky C^0I^0, I^0II^0, II^0BD^0 do úsečiek C^rI^r, I^r II^r, II^r D^r.



Obr.7 Rozvinutý rez

Zdroj: Josef Novák, Oldřich Roubek (1989)

1.2.1.4 Hranolové plochy

Vladimír Mařík a Emilie Ryšáňová (1975) popisujú hranolovú plochu ako súhrn všetkých rovnobežných priamok, ktoré pretínajú obvod vypuklého riadiaceho mnohouholníka. Vytvárajúce priamky sú priamky hranolovej plochy. Ide o priamky, ktoré prechádzajú vrcholmi tohto riadiaceho mnohouholníka. Nazývame hrany. Susedné hrany hranolového priestoru sú tie hrany hranolového priestoru (hranolovej plochy), ktoré prechádzajú susednými vrcholmi jeho (jej) určujúceho n-uholníka. Každá hranolová plocha má konečný počet hrán, najmenej tri. Pre počet n hrán je hranolová plocha n-boká.

Steny sú rovinné pásy medzi dvoma susednými hranami – je to množina priamok, ktoré pretínajú stranu mnohouholníka. Vrcholová priamka je každá priamka, ktorá je rovnobežná s hranami hranolovej plochy. Vrcholovou rovinou hranolovej plochy rozumieme každú rovinu rovnobežnou s priamkami hranolovej plochy.

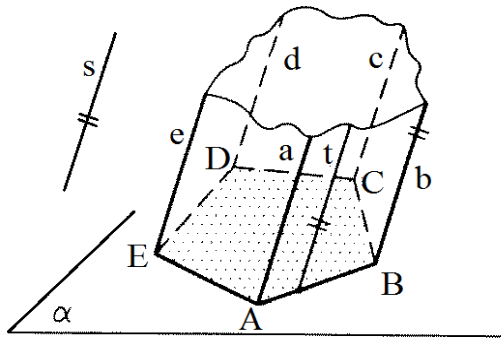
Susedné steny hranolového priestoru sú steny hranolového priestoru (hranolovej plochy), ktoré sa pretínajú v jednej hrane hranolového priestoru (hranolovej plochy).

Smerová priamka hranolového priestoru je každá priamka rovnobežná s priamkou *s*.

1.2.1.5 Charakteristika pojmov súvisiacich s hranolovými plochami

Rudolf Višňovský, Michaela Turčanová (1999) rozoznávajú hranolový priestor a hranolovú plochu:

1) Množina všetkých priamok t, ktoré sú rovnobežné s priamkou s a pretínajú n-uholník
   P_n a tiež jeho vnútorné body sa nazýva **n-boký hranolový priestor** (obr.8).
2) Množina všetkých priamok, ktoré sú rovnobežné s priamkou s a pretínajú strany n-uholníka P_n sa nazýva **n-boká hranolová plocha** idúcu do nekonečna (obr.8). Určujúcim n-uholníkom hranolového priestoru je nazývaný n-uholník P_n.



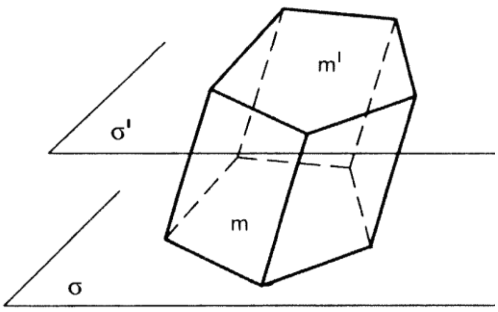
Obr.8 Hranolová plocha, hranolový priestor

Zdroj: Vlastné spracovanie

Světlana Tomiczková (2006) udáva že hranolová plocha je určená rovinnou lomenou čiarou - polygonom k (k ⊂ σ) a smerom s, ktorý nenáleží danej rovine *(s╫σ)* a je tvorená priamkami, ktoré pretínajú polygon k a sú smeru s – (obr.9b).

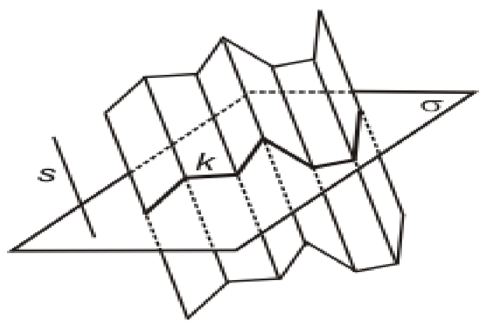
Ak je polygon uzavretý, potom množina priamok smeru s. ktoré pretínajú polygon alebo vnútro polygonu, sa nazýva hranolový priestor. V projektovom rozšírení euklidovského priestoru sa dá definovať hranolovou plochu ako špeciálny prípad ihlanovej plochy, ktorej vrcholom je nevlastní bod. Vrcholovou rovinou je každá rovina smeru s.

Hranol je prienik hranolového priestoru a priestorovej vrstvy určené rovinou a riadiaceho polygonu a roviny – (obr.9a). Výška hranolu je vzdialenosť rovín podstav. Ak sú pobočné hrany kolmé na roviny podstáv, nazývame hranol kolmý a spojnice stredov podstáv je jeho osou (ak existuje). V opačnom prípade je hranol kosý. Hranol, jeho podstavou je rovnobežník, nazývame rovnobežnostenný.



Obr.9a Hranol

Zdroj: Vlastné spracovanie



Obr.9b Riadiaca krivka

Zdroj: Vlastné spracovanie

1.3 Prechodové plochy

Prechodové plochy patria k špeciálnemu prípadu, kedy spájame plochy rôznej veľkosti. Tieto plochy môžu mať medzi sebou aj rôzny tvar. V technickej praxi majú veľký význam pri spájaní otvorov potrubí s rôznym profilom. Tento tvar môže byt kruhový, eliptický, štvorcový. Príklad použitia je zobrazený v prílohe č.2. Tieto plochy patria k rozvinuteľným priamkovým plochám. Ich tvoriace plochy spájajú body body ich určujúcich kriviek. Tvoriace priamky musia byť torzálnymi priamkami plochy. Teda pozdĺž tvoriacej priamky sa dotýka jediná dotyková rovina τ.

1.4 Generovanie plôch

Pod pojmom generovanie plôch rozumieme ich vyjadrenie pomocou rovníc. K tomuto je potrebné zaviesť:

1) vzťahy medzi množinami bodov, priamok a rovín
2) lineáre rovnice

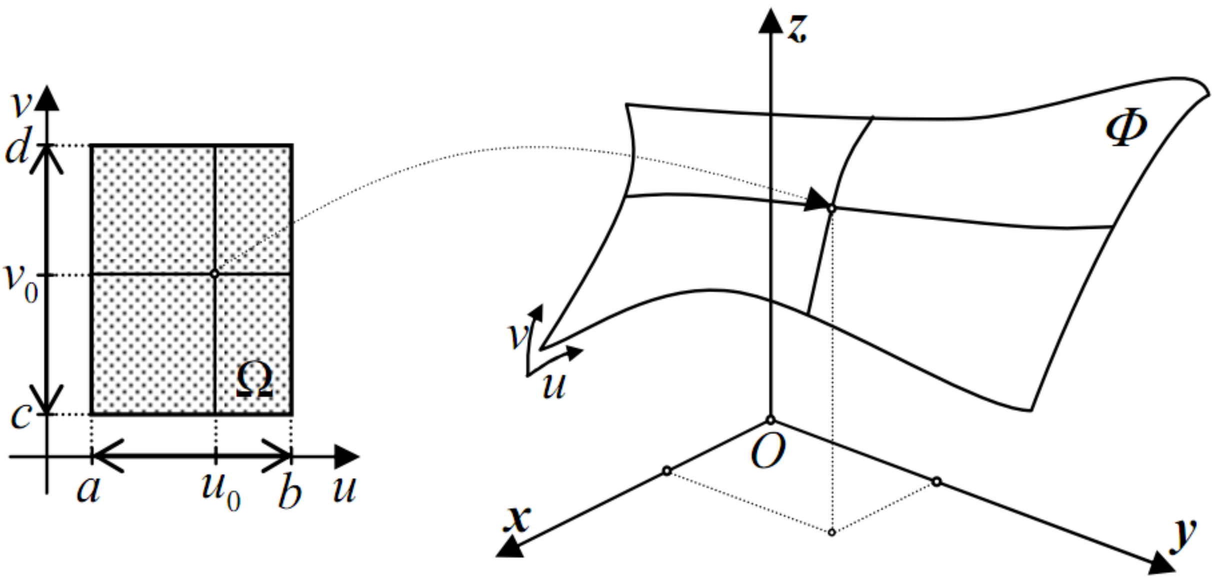
Na stanovenie týchto vzťahov využijeme karteziánsku súradnicovú sústavu (O,x,y,z) v euklidovskom priestore. Metódy na vyjadrenie plôch používame opisy pomocou:

1) implicitných rovníc
2) explicitných vyjadrení
3) parametrických funkcií

V našej práci sa zameriavame na parametrické vyjadrenie plôch. Pri parametrickom vyjadrení (2), plochu určujú funkciu dve premenné u, v (a, b) čo sú parametre plochy t.j.

$$\begin{aligned} x &= x(u,v) \\ y &= y(u,v) \\ z &= z(u,v) \end{aligned} \tag{2}$$

Plocha je teda súvislá podmnožina Φ, ktorá je hladkým obrazom oblasti **Ω** kde **Ω** = U × V a najčastejšie U=(a, b), V=(c, d) sú číselné intervaly.



Obr.10 Zobrazenie plochy pomocou parametrického vyjadrenia

Zdroj: Soňa Kudličková, Miroslav Tisoň

1.4.1 Krivky na ploche

Na plochách nás zaujímajú hlavne ich tvoriace krivky. Táto krivka na ploche je určená pohybom bodu viazaný určitou podmienkou. Ako už bolo spomenuté, krivky na ploche sú parametrické krivky. Ľubovoľnú krivku plochy dostaneme, ak volíme parametre *u*, *v* závislé na ďalšom reálnom parametri *t*, tj.

$$u = u(t),\ v = v(t), \tag{3}$$

kde *u(t)*, v(t) sú funkcie definované na nejakom intervale. Parametrické rovnice krivky plochy dostaneme dosadením (3) do (2), tj.

$$x = x[u(t), v(t)], \qquad y = y[u(t), v(t)], \qquad z = z[u(t), v(t)]. \tag{4}$$

Krivku na ploche môžeme vyjadriť ešte týmto spôsobom: nech $F(x,y,z) = 0$ je implicitní tvar rovnice danej plochy a $G(x,y,z) = 0$ je rovnica ďalšej plochy, na ktorej daná krivka taktiež leží, pritom $F(x,y,z) \neq G(x,y,z)$. Krivka na ploche je potom definovaná ako prienik týchto dvoch plôch (množina všetkých spoločných bodov oboch plôch)

$$F(x, y, z) = 0,\ G(x, y, z) = 0 \tag{5}$$

Ak je plocha $G(x,y,z) = 0$ rovina, potom hovoríme o reze plochy rovinou alebo o rovinnom reze. Z konštruktívneho hľadiska ide teda o zostrojenie priesečnej krivky plochy a roviny alebo prienikovej krivky dvoch plôch.

2 CIEĽ PRÁCE

Cieľom bakalárskej práce je zhrnúť literárne poznatky popísaných v domácej i zahraničnej literatúre týkajúce sa valcových a hranolových plôch a popísať možnosti ich využitia v technickej praxi.

Tieto poznatky využijeme vo výsledkoch práce, kde máme za úlohu modelovanie jednoduchých valcových plôch pomocou ich parametrických rovníc.

3 METODIKA

Na počítačové modelovanie potrebujeme vedieť základný matematický model, pomocou ktorého môžeme meniť tvar príslušnej plochy. Na zostrojenie tohto matematického modelu vychádzame z predpokladaného tvaru plochy (tvoriacej čiary) a tiež so spôsobu jej vzniku teda z pohybu jej riadiacej čiary (rotačná, translačná...). Tieto informácie sú čerpané z internetových publikácií zobrazené v zozname použitej literatúre.

Po zistení rovnice pristupujeme k danej modelácií pomocou grafického softvéru, kde meníme parametre danej rovnice. K jednotlivým matematickým modelom pripojíme názorný grafický príklad s konštantnými hodnotami a tiež k nim pripojíme obrazovú prílohu s využitím v praxi.

4 VÝSLEDKY PRÁCE

4.1 Parametrické zobrazenie valcových plôch a ich využitie

Hranolové a valcové plochy sú určené rovnicou druhého stupňa. Sú určené riadiacou krivkou v rovine π=xy a smerom tvoriacich priamok, ktoré prechádzajú v danom smere bodmi riadiacej krivky. Priama (kolmá) valcová plocha má tvoriace priamky kolmé na rovinu riadiacej krivky, t.j. rovnobežné so súradnicovou osou z. Analytickým vyjadrením priamej valcovej plochy je rovnica
F(x,y) je rovnica riadiacej čiary

$$F(x, y) = 0,\ z \in R \tag{5}$$

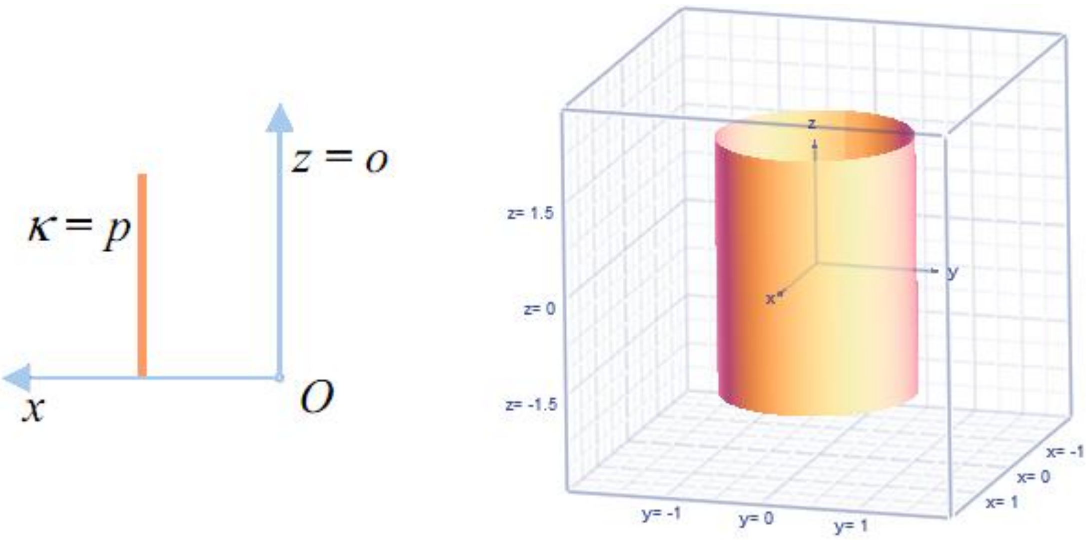
Ak je riadiacou krivkou valcovej plochy kružnica so stredom S=[x0,y0,0] a polomerom *r*, potom rovnica kružnicovej valcovej plochy (rotačnej valcovej plochy) je

$$(x - x0)^2 + (y - y0)^2 = r^2; \qquad z \in R \tag{6}$$

Všeobecná rovnica plochy má tento tvar:

$$x^2 + y^2 = a^2 \tag{7}$$

Pri modelovaní rotačných valcových plôch je určujúcim prvkom tvoriaca čiara κ (priamka).



Obr.11 vznik rotačnej valcovej plochy rotáciou riadiacej priamky okolo osi z

Zdroj: Vlastné spracovanie

4.1.1 Rotačná eliptická valcová plocha

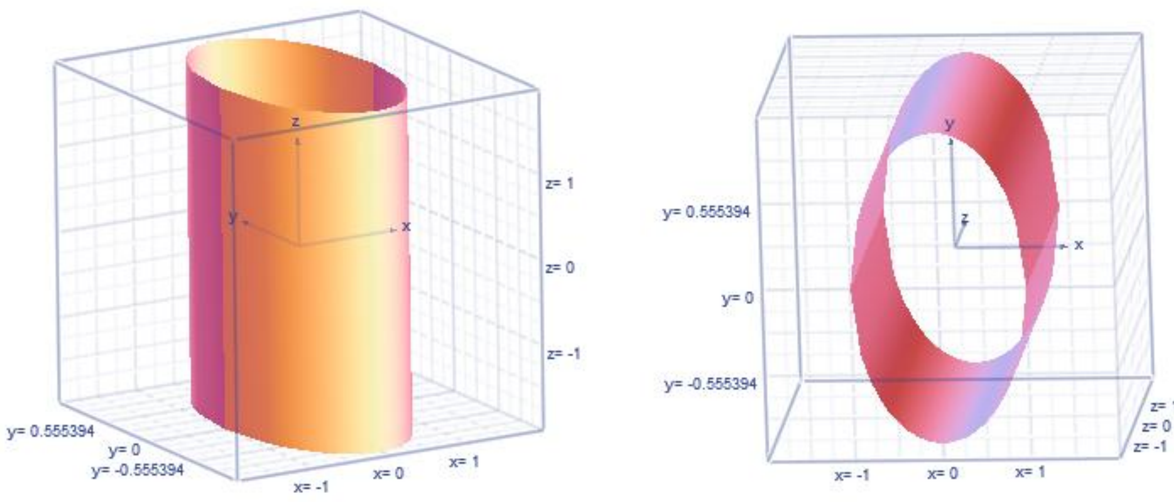
V tomto prípade je riadiacou krivkou valcovej plochy elipsa so stredom S=[x0,y0] a polosami *a* a *b*. Rovnica eliptickej valcovej plochy bude:

$$a^2(x-x_0)^2+b^2(y-y_0)^2=1; \qquad z\in R \tag{8}$$

Všeobecná rovnica rotačnej Eliptickej valcovej plochy má potom tvar:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{9}$$

Grafické zobrazenie takéhoto matematického popisu bude (obr.12):



Obr.12 Eliptická valcová plocha

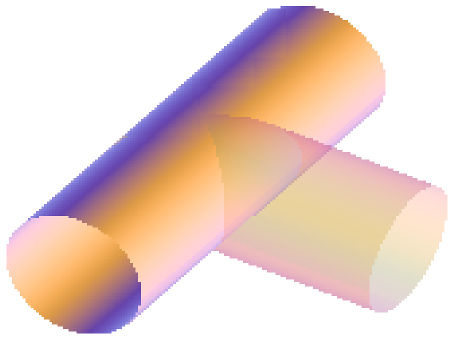
Zdroj: Vlastné spracovanie

V prvom prípade sme pri modelovaní mali k dispozícií jednu premennú, čo nám umožňuje meniť len samotný priemer tvoriacej krivky čiže kružnicu (rotačnú valcovú plochu). Pri eliptickej valcovej ploche môžeme meniť dve premenné a, b čo má za následok zmeny tvoriacej krivky na eliptickú.

Zmenou premennej:

- a meníme priemer na osy x
- b meníme priemer na osy y

S týmito druhmi plôch sa v technickej praxi stretávame v mnohých oblastiach. Napríklad využitie na rôzne druhy odkvapových plôch alebo potrubí. Kde môžeme taktiež využiť tvary, ktoré vznikajú kombináciami týchto plôch. Príkladom je prienik dvoch rotačných valcových plôch znázornenom na (obr.13a) s využitím na (obr.13b).



Obr.13a Prienik dvoch valcových plôch

Zdroj: Vlastné spracovanie

Obr.13b Odbočka potrubia

Zdroj: http://www.pesiazona.sk

4.1.2 Nerotačná parabolická valcová plocha

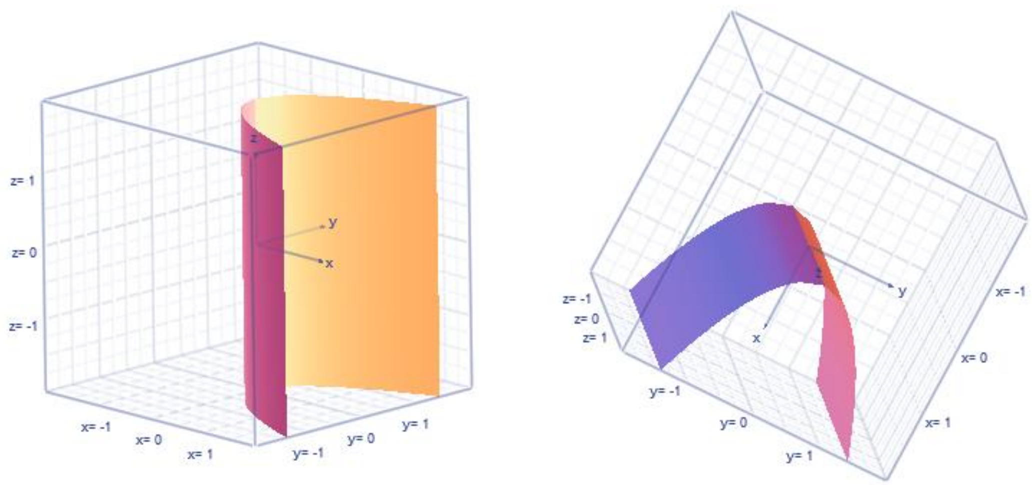
Riadiacou krivkou valcovej plochy je parabola s vrcholom V=[x0,y0] a parametrom *p*, potom rovnica parabolickej valcovej plochy je

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0); \qquad z \in R \tag{10}$$

Všeobecnú rovnicu nerotačnej parabolickej valcovej plochy môžeme zapísať ako:

$$y^2 = px \tag{11}$$

Grafické vyjadrenie takého matematického modelu bude (obr. 14):

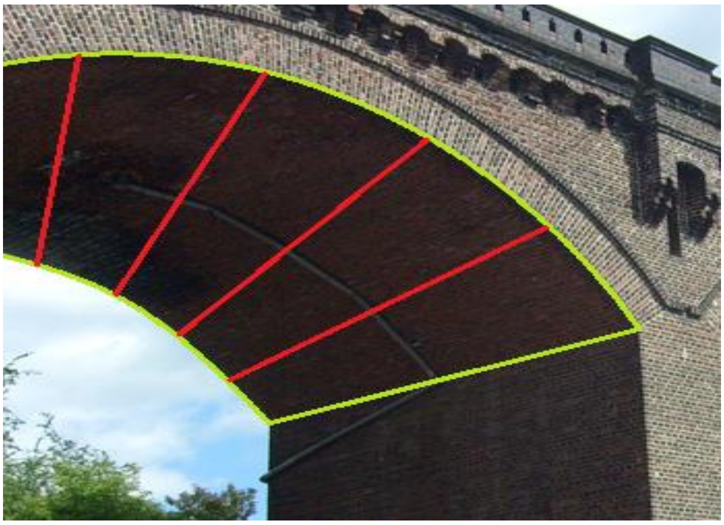


Obr.14 Nerotačná parabolická valcová plocha

Zdroj: Vlastné spracovanie

Máme jednu premennú p pomocou ktorej môžeme meniť tvar riadiacej paraboly.

Veľké uplatnenie majú parabolické valcové plochy v stavebnom odvetví. Príkladom je múzeum súčasného umenia Curitiba v Brazílii od autora Oscara Niemeyera uvedené v prílohe 1. My si ukážeme použitie pri stavbe klenieb (obr.15) t.j. stavby ktoré preklenujú priestor alebo prenášajú zaťaženie do ďalších podperných častí.



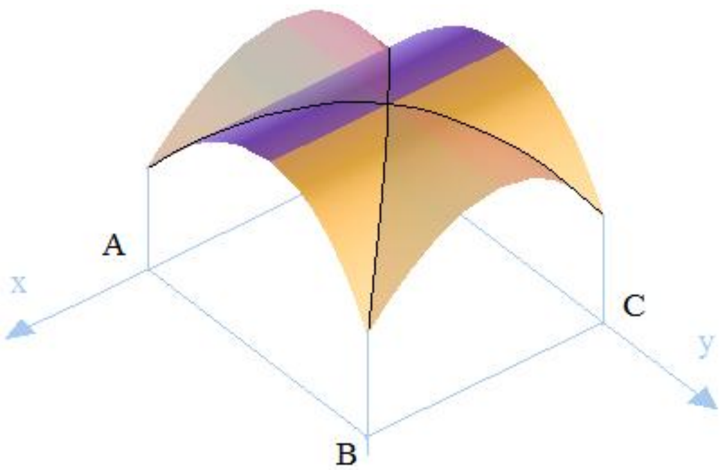
Obr.15 Viadukt s vyznačenými tvoriacimi krivkami

Zdroj: Vlastné spracovanie

Taktiež je možné využiť kombinácie týchto plôch. Prienikom dvoch parabolických valcových plôch dostaneme tzv. „krížový oblúk“. Takáto plocha bude tvorená rovnicami:

$$y^2 = px\,; \qquad z^2 = px \tag{12}$$

Na (obr.16) možno vidieť grafické vyjadrenie takéhoto prieniku a na (obr.17) taktiež využitie.



Obr.16 Krížová klenba

Zdroj: Vlastné spracovanie

Obr.17 Krížová klenba z vyznačenými tvoriacimi krivkami

Zdroj: Kudličková Soňa, Miroslav Tisoň

4.1.3 Nerotačná hyperbolická valcová plocha

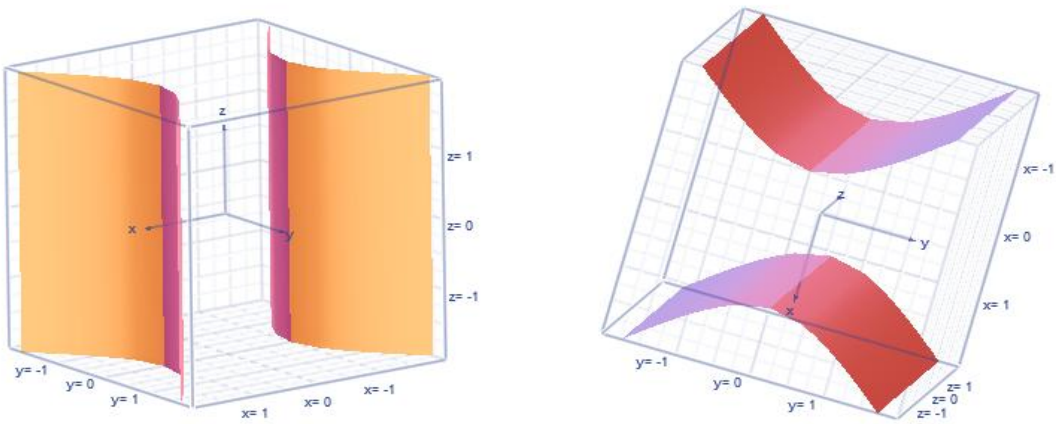
Ak je riadiacou krivkou valcovej plochy hyperbola so stredom S=[x0,y0,0] a polosami *a* a *b*, potom rovnica hyperbolickej valcovej plochy je

$$a^2(x - x_0)^2 - b^2(y - y_0)^2 = 1; \qquad z \in R \tag{13}$$

Všeobecná rovnica nerotačnej hyperbolickej valcovej plochy potom bude:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{14}$$

Graficky môžeme vyjadriť tento zápis (Obr. 18):



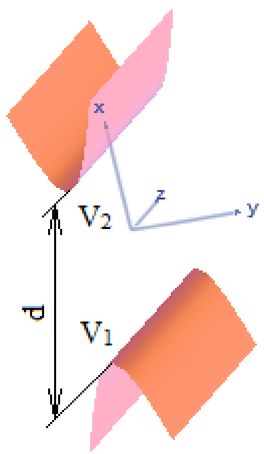
Obr.18 Nerotačná hyperbolická valcová plocha

Zdroj: Vlastné spracovanie

4.2 Modelovanie nerotačnej hyperbolickej valcovej plochy

Modelovanie spočíva v menení parametrov v danej všeobecnej rovnice. Na obrázkoch možno vidieť ako sa mení tvar hyperbolickej valcovej plochy. Najskôr si predvedieme ako sa mení tvar, keď zvyšujeme hodnotu parametra premennej „b“. Parameter „a“ sa pritom nemení a zostáva na konštantnej hodnote.

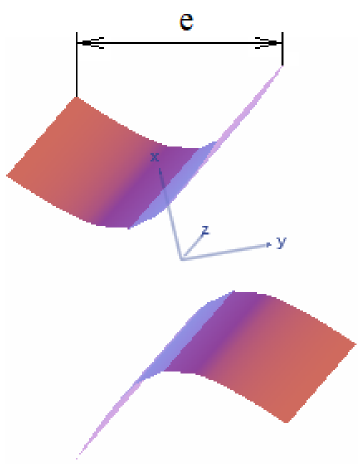
Na (Obr. 19) nám parameter a udáva vzdialenosť vrcholov V danej hyperboly. Keďže je konštantný sa nám vzdialenosť vrcholov V_1 V_2 nemení



Obr.19 Hyperbolická valcová plocha (b=0,28; a=1)

Zdroj: Vlastné spracovanie

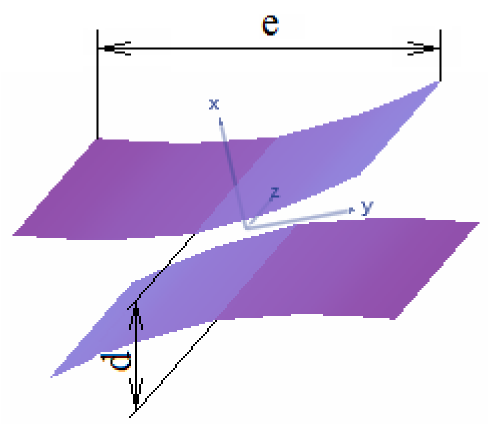
Z (obr. 20) vidieť ako sa zmenou hodnoty parametra „b“ zväčšuje vzdialenosť medzi hranami hyperboly „e“. To znamená že hyperbola sa rozvíňa. Vzdialenosť vrcholov „d“ je konštantná kvôli nezmenenej hodnoty parametra „a“.



Obr.20 Hyperbolická valcová plocha (b=0,83; a=1)

Zdroj: Vlastné spracovanie

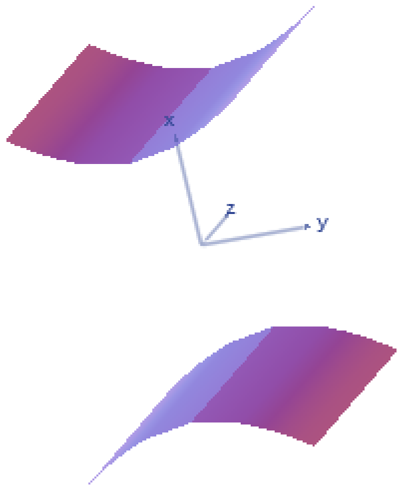
V ďalšom prípade si ukážeme ako sa mení tvar hyperbolickej valcovej plochy, keď budeme meniť parameter „a“ pričom hodnota parametra „b“ zostáva konštantná.
Na (Obr.21) vidieť ako nám parameter „a“ udáva vzdialenosť vrcholov paraboly „d“ a tiež vzdialenosť hrán paraboly „e“.



Obr.21 Hyperbolická valcová plocha (b=1; a=0,5)

Zdroj: Vlastné spracovanie

Z (obr. 22) vidieť ako sa zmenou hodnoty parametra „a“ zmenšuje vzdialenosť medzi hranami hyperboly „e“. To znamená že hyperbola sa zmršťuje. Taktiež sa v tomto prípade mení vzdialenosť vrcholov „d“. Táto vzdialenosť sa zväčšuje.



Obr.22 Hyperbolická valcová (b=1; a=2)

Zdroj: Vlastné spracovanie

Záver

Z úvodnej klasifikácie plôch môžeme zaradiť plochy valcové a hranolové k plochám rozvinuteľným, čiže ich môžeme zobraziť dvojrozmerne na dvoch osiach. Typy plôch závisia od tvoriacej krivky, ktoré kopírujú tvar danej krivky. Taktiež vznik plôch podlieha pohybu práve tejto krivky. Z takto vzniknutých plôch môžeme prienikom dvoch rovín dostať priestorové útvary, ktorých parametre sú popísané v prehľade literatúry.

Náš prvoradí cieľ je však bol určiť tieto plochy pomocou vzťahov, ktoré nám dokážu prácu pri zobrazovaní uľahčiť a tiež odstrániť nepresnosti, ktoré sa pri ručnej tvorbe pravdepodobne vyskytnú. Tieto vzťahy sú závislé predovšetkým od tvaru riadiacej krivky.

Po ich určení sme boli schopní pomocou grafického softwaru ďalej tieto plochy zobraziť. Ako sa menil tvar plôch možno vidieť v štvrtej časti práce, kde sú zobrazené meniace sa parametre rovníc s ktorých zákonite vyplýva aj požadovaná zmena plôch. Konkrétne je popisovaná na hyperbolickej valcovej ploche, ktorá patrí k nerotačným plochám. Na grafickú prezentáciu sme použili program Microsoft Mathematics 4.0, ktorý slúži na jednoduché zobrazenie daných parametrických rovníc.

Poznanie parametrického vyjadrenia plôch, umožnilo vzhľadom na veľký rozvoj počítačových technológií využiť ich možnosti pri automatizácií výroby. Tu sú v súčasnosti už samozrejmosťou a s určitosťou budú nepostrádateľné aj v budúcnosti.

Zoznam použitej literatúry

1. Kudličková Soňa, Miroslav Tisoň Generovanie rotačných plôch a ich vizualizácia pomocou IKT [online] [cit. 2010-07-15]. Dostupné na : http://www.ddm.fmph.uniba.sk/files/EMATIK/KudlickovaTison.pdf

2. Kvadratické útvary priestoru [online] [cit. 2010-07-15]. Dostupné na : http://www.evlm.stuba.sk/~velichova/PREDNASKY/Prednaska26.xml

3. Macková Božena – Viera Zaťková. 1985 Riešenie základných úloh z deskriptívnej geometrie pomocou počítača – Počítačová geometria. 1.vyd SVŠT : Bratislava 206 str.

4. Medek Václav, Zámožík Jozef 1978 Konštruktívna geometria pre technikov Technická a ekonomická literatúra : Bratislava

5. Novák Josef Novák – Oldřich Roubek, 1989 Konštruktívna geometria. 3 vyd ČVUT : Praha 265 str.

6. ORAVEC, G. – RYBÁR, J. – ZBUŇÁKOVÁ, E. 1987. Konštruktívna geometria. 2. vyd. Bratislava: STU, 1993. 264 s. ISBN 80-227-0598-5

7. Palajová Helena. 1997 Deskriptívna geometria II. 2 vyd TU : Zvolen, 243 str. ISBN 80-228-0601-3

8. Problems on Superposition of Space Figures [online] [cit. 2010-07-15]. Dostupné na : http://www.evlm.stuba.sk/~velichova/Geometria/PREDNASKY/position.htm

9. Quadric surface [online] [cit. 2010-07-15]. Dostupné na : http://en.wikipedia.org/wiki/Quadric

10. Quadric surface [online] [cit. 2010-07-15]. Dostupné na : http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/CalcIII/QuadricSurfaces.aspx

11. Szokeová Danuša. 2001 Deskriptívna geometria I - Rovnobežné premietanie. 1 vyd STU : Bratislava, 113 s ISBN 80-227-1522-0

12. Širáň Jozef. Hyperbolická geometria očami algebraika SvF STU [online] [cit. 2010-07-15]. Dostupné na : http://www.math.sk/gaja/presentation/2006/siran2006.pdf

13. Švec Ondrej, Dušan Páleš, M. Balková 2008 Deskriptívna geometria 3 vyd SPU : Nitra 164 s, ISBN 978-80-552-0019-4

14. TISOŇ, MIROSLAV. 2009. Využitie IKT vo vylučovaní témy rotačné telesá a plochy : dizertačná práca. Bratislava : UKVB, 2009. 202 s.

15. Tomiczková Světlana Deskriptívna geometria I Západočeská univerzita : Plzeň [online] [cit. 2010-01-15]. Dostupné na: http://www.scribd.com/doc/52133067/4/Odchylka-mimob%C4%9B%C5%BEek

16. Velichová Daniela Deskriptívna Geometria [online] [cit. 2010-07-15]. Dostupné na : http://www.km.sjf.stuba.sk/data/Geometria/KOGE/kniha.html

17. Višnovský Rudolf – Michaela Turčanová 1999 Deskriptívna geometria I Žilinská univerzita : Žilina, ISBN 80-7100-633-5