SLOVENSKÁ POĽNOHOSPODÁRSKA UNIVERZITA V NITRE

FAKULTA EKONOMIKY A MANAŽMENTU

2123090

DIFERENCIÁLNY POČET AKO MATEMATICKÝ NÁSTROJ V MIKROEKONÓMII

2011 **Bc. Jozef Vindiš**

SLOVENSKÁ POĽNOHOSPODÁRSKA UNIVERZITA V NITRE

FAKULTA EKONOMIKY A MANAŽMENTU

DIFERENCIÁLNY POČET AKO MATEMATICKÝ NÁSTROJ V MIKROEKONÓMII

Diplomová práca

Študijný program:	Ekonomika podniku
Študijný odbor:	6284800 Ekonomika a manažment podniku
Školiace pracovisko:	Katedra matematiky
Školiteľ:	Mgr. Radomíra Gregáňová, PhD.

Nitra 2011 **Bc. Jozef Vindiš**

Čestné vyhlásenie

Podpísaný Jozef Vindiš vyhlasujem, že som záverečnú prácu na tému „Diferenciálny počet ako matematický nástroj v mikroekonómii“ vypracoval samostatne s použitím uvedenej literatúry.

Som si vedomý zákonných dôsledkov v prípade, ak uvedené údaje nie sú pravdivé.

V Nitre 11. apríla 2011

....

Poďakovanie

Touto cestou vyslovujem poďakovanie pani Mgr. Radomíre Gregáňovej, PhD. za pomoc, odborné vedenie, cenné rady a pripomienky pri vypracovaní mojej diplomovej práce.

Abstrakt

Matematika ako prírodná veda má rozsiahly predmet svojho skúmania. Prevažná väčšina vedných disciplín pri svojom skúmaní využíva princípy a zákonitosti matematiky. Jednou z týchto vied je nepochybne aj ekonómia. Možnosti využitia matematiky v ekonomickej vede sú rozsiahle. V tejto práci si ukážeme iba zlomok z toho, ako môžeme matematiku aplikovať v ekonómii. Práca sa zaoberá predovšetkým praktickým použitím diferenciálneho počtu a využitím funkcie jednej a dvoch reálnych premenných v ekonómii. Kapitola Výsledky práce je rozdelená na dve časti. Prvá časť je venovaná základným vlastnostiam diferenciálneho počtu, jej cieľom je ukázať, ako sa derivujú jednotlivé elementárne funkcie, ktoré neskôr budú použité ako funkcie ekonomické. Ostatné podkapitoly tvoria druhú časť a poukazujú na možnosti praktického použitia diferenciálneho počtu v ekonomických úlohách. V týchto úlohách je uvedený je dopyt, produkcia, náklady, príjmy, zisk a maximalizácia zisku. Ku každej úlohe je uvedené riešenie s použitými postupmi.

Kľúčové slová:

- funkcia
- derivácia funkcie
- produkcia
- náklady
- príjmy
- zisk

Abstrakt

Mathematik, so wie Naturwissenschaft, hat umfangreichen Forschungsinhalt. Mit aller Wahrscheinlichkeit gibt es keine Naturwissenschaft, die bei der Forschung, die Mathematikgesetze nicht nützt. Einer aus dieser Wissenschaft ist zweifellos die Ökonomie. Die Möglichkeiten Mathematik auszunützen, in der Naturwissenschaft, sind umfangreich. In dieser Arbeit zeigen wir nur einen Bruchteil davon, wie man Mathematik in Ökonomie anwendet. Wir beschäftigen uns vor allem mit der praktische Auswertung Differentialrechnung und dann mit der Auswertung in Ökonomie. Das Kapitel Die Ergebnisse der Arbeit ist in zwei Teile getrennt. Die erste Teil beschäftigt sich mit den Differentialrechnungeigenschaften, das Ziel ist zeigen, wie man Elementarfunktion deriviriet, die später als ökonomische Funktionen eingesetzt werden. Die übrigen Subkapitele in dem Kapitel Die Ergebnisse der Arbeit bilden die zweite Teil und zeigen die Differentiationauswertung, die in ökonomischen Aufgaben, wo die Anfrage, Produktion, Kosten, Einkommen, Gewinn und Maximalgewinn vertreten sind. Jedes einzelne Beispiel, in diesem Kapitel, auch ausgewertet ist.

Schlüsswörter:

- Funktion
- Differentiation der Funktion
- Produktion
- Kosten
- Einkommen
- Gewinn

Obsah

Úvod

Ekonómia, v podobe v ktorej ju dnes poznáme, sa považuje sa vedu relatívne mladú. Termín oikonomikos síce prvýkrát vyslovil Xenofón už v Starom Grécku, avšak vznik ekonomickej vedy sa podľa mnohých ekonómov datuje v roku 1776, kedy Adam Smith zhrnul všetky dovtedy známe prúdy ekonomického myslenia do jednotného teoretického systému. Ekonómia potom postupne prechádzala rôznymi etapami a procesmi, ktoré ju viac, či menej ovplyvnili. Podstatná zmena nastala v devätnástom storočí, kedy sa začína v ekonómii uplatňovať marginalistický prístup. Čoraz viac a viac je ekonomická veda spájaná s kvantitatívnymi metódami a matematika si začína v tejto vednej disciplíne vytvárať nezastupiteľné miesto. Dnes snáď už nikto nepochybuje, že bez matematického aparátu by sa ekonómia nemohla rozvinúť do dnešnej podoby. Z toho dôvodu je nepredstaviteľné hovoriť v súčasnosti o ekonómii bez matematických princípov. Aj vďaka aktívnemu využitiu kvantitatívnych metód a metód matematického aparátu ekonómia nezostala len akousi vedou na papieri, vedou teoretickou. Vďaka matematike sa ekonomická teória úspešne mohla preniesť do praxe a stala sa tak vedou predovšetkým praktickou, ktorá aktívne využíva matematiku a všetky jej metódy. Ekonomická veda, ale aj iné vedy úspešne využívajú matematické metódy ako metódy poznávania.

Diferenciálny počet, na ktorý je upriamená táto práca, tvorí významnú súčasť matematiky, ktorú nazývame matematická analýza. Tento dôležitý matematický nástroj nám v tejto práci poslúži ako dôkaz neoddeliteľnosti matematiky od ekonómie. Prostredníctvom diferenciálneho počtu budú zodpovedané niektoré otázky, ktoré majú súvis s optimálnym rozhodovaním ekonomického subjektu, pričom sa sústrediť budeme na teóriu produkcie a nákladov, súhrnne povedané teória firmy. Medzi tieto otázky môžeme zaradiť najmä tieto: Pri akej úrovni produkcie sú náklady na výrobu jedného výrobku minimálne? Oplatí sa ešte rozšíriť objem doteraz vyrábanej produkcie? Akú cenu výrobkov treba stanoviť, aby sme dosiahli maximálny zisk? Na tieto a ďalšie otázky nájdeme odpoveď v tejto práci. Aby sme však mohli objektívne zodpovedať a hodnoverne vyriešiť úlohy, ktoré sú s tými otázkami spojené, je nevyhnutné ovládať nielen matematický, ale aj ekonomický aparát. Bez hlbších znalostí mikroekonómie, jej zákonitostí a princípov, nemôžme očakávať väčšie úspechy v tejto oblasti. Ak by tomu tak nebolo, naše dosiahnuté výsledky by sa stali iba číslami, ktorých význam a zmysel nepoznáme. Neoddeliteľnosť matematiky a ekonómie je krásna práve v tom, že každý či už čiastkový alebo konečný výpočet a výsledok, vieme interpretovať a ekonomicky vysvetliť. Tento fakt napovedá, že každý interpretovateľný výsledok je živší a pre čitateľa príťažlivejší a zrozumiteľnejší. Bez akýchkoľvek aplikácii by teda matematika bola iba vedou, ktorá hovorí ako a prečo, ale nevie povedať kde a kedy. Spojitosť matematiky a ekonómie, prípadne iných vedných odborov, je teda zrejmá.

1 Prehľad o súčasnom stave riešenej problematiky

1.1 Vymedzenie ekonomických pojmov

Ekonómia sa zaoberá tým, ako spoločnosť obhospodaruje svoje vzácne zdroje. Vo väčšine spoločností nie sú zdroje alokované rozhodnutím jedného centrálneho plánovača, ale kombináciou správania sa miliónov domácností a podnikov. Ekonómovia teda skúmajú, ako sa ľudia rozhodujú. Zaoberajú sa tiež tým, ako ľudia na seba navzájom pôsobia a aký je výsledok tejto interakcie, píše **Mankiw (2000)**. Ako príklad takejto interakcie uvádza veľký počet predávajúcich a kupujúcich, ktorý ovplyvňujú cenu, za ktorú sa statok predáva a množstvo, ktoré sa predá.

Arnold (2008) definuje mikroekonómiu ako odvetvie ekonómie, ktoré sa zaoberá ľudským chovaním. Jej oblasť skúmania sa dotýka relatívne malých jednotiek: jednotlivec, podnik, práca, individuálny trh. Ďalej uvádza, že mikroekonómia v sebe zahŕňa viacerých kľúčových hráčov ako spotrebitelia, podniky a vlastníci výrobných faktorov. Každý z týchto mikroekonomických hráčov má určitý cieľ (zámer), obmedzené zdroje a možnosti voľby. Jednoducho povedané, celá mikroekonómia je o cieľoch, obmedzeniach a možnostiach výberu.

Gravelle a Rees (2004) vnímajú mikroekonómiu ako súbor modelov navrhnutých s cieľom pomôcť nám pochopiť proces, pri ktorom sú vzácne zdroje rozdelené na alternatívne použitie a na úlohu cien a trhov v tomto procese. Prostredníctvom rozvoja operačného výskumu, manažmentu a náuke o podnikovej ekonomike, koncept z mikroekonómie je používaný aj pri rozhodovaní v podnikaní.

Mikroekonómia analyzuje a opisuje správanie jednotlivých subjektov trhu, t. j. jednotlivca, domácnosti, podnikateľov, podnikov a firiem, uvádzajú **Hontyová, Lisý a Majdúchová (2005)**. Mikroekonómia napríklad vysvetľuje proces tvorby cien jednotlivých druhov tovarov, vzájomný vzťah ponuky a dopytu po jednotlivých tovaroch. Mikroekonómia pomáha jednotlivcom, domácnostiam alebo firmám riešiť problémy tak, aby im ich činnosť priniesla čo najväčšiu užitočnosť, čo najvyššie uspokojenie. Napríklad majiteľ letného kúpaliska musí analyzovať problém, ako sa zmení návštevnosť kúpaliska, ak zvýši ceny vstupeniek. Musí si tiež všímať, ako návštevnosť kúpaliska ovplyvňujú ceny potravín v bufetoch, ceny vstupného na iných kúpaliskách, ale aj výška príjmov obyvateľstva.

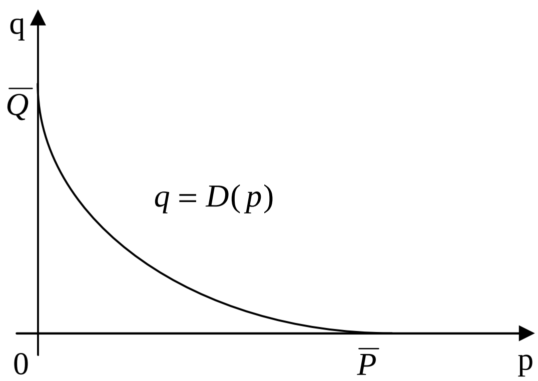
Dopyt je vzťah medzi dvomi ekonomickými veličinami, a to cenou príslušného statku a množstvom statku, ktoré sú spotrebitelia ochotní kúpiť v určitom časovom období; všetky ostatné veličiny sú nezmenené. Ako teda uvádzajú **Taylor a Weerapana (2007)**, prvá veličina je cena a druhá dopytované množstvo. Ďalej dodávajú, že fráza „všetky ostatné veličiny sú nezmenené“, alebo „ceteris paribus“, je spojená s definíciou dopytu, pretože množstvo, ktoré je spotrebiteľ ochotný zakúpiť závisí od mnohých ďalších veličín popri cene statku. Tvrdia, že ostatné veličiny je potrebné zachovať konštantné, pokiaľ je skúmaný vzťah medzi cenou a dopytovaným množstvom.

Podľa **Zimku (1998)** vzťah medzi cenou p a množstvom q môžeme vyjadriť funkciou dopytu:

$$q = D(p)\,,$$

taktiež $$p = d(q)\,.$$

Ak funkcie $q = D(p)$ a $p = d(q)$ predstavujú jednu a tú istú funkciu dopytu, potom musia byť vo vzájomne inverznom vzťahu.



Obr. 1

[Funkcia dopytu]

Ďalej dodáva, že ak chceme, aby premenné p a q vo funkciách dopytu mali ekonomický význam, nemôžu tieto premenné nadobudnúť záporné hodnoty a zároveň nemôžu neobmedzene rásť. Priesečník grafu funkcie dopytu (Obr. 1) s osou p je $\overline{P}$, priesečník funkcie dopytu s osou q je $\overline{Q}$. Hodnota $\overline{P}$ určuje dolnú hranicu ceny, pri ktorej by ešte nebol u spotrebiteľov záujem o výrobok, lebo jeho cena by bola vysoká. Hodnota $\overline{q}$ určuje, množstvo výrobkov, o ktoré by mali spotrebitelia záujem pri teoreticky nulovej cene. Premenné p a x sú ohraničené:

$$0 \leq p \leq \overline{P} \qquad\qquad 0 \leq q \leq \overline{Q}$$

Podľa **Šlosára, Šlosárovej a Majtána (2002)** je ponuka tá časť trhu, na ktorej sa nachádzajú výrobcovia, predávajúci. Tvorí ju objem tovarov a služieb a služieb určených na predaj za ceny, ktoré si stanovuje predávajúci. Dodávajú, že ponuku determinujú najmä ceny výrobných faktorov, vzťah nákladov a výnosov (zisk) a ceny ponúkaných tovarov a služieb. Rast cien tovarov spôsobuje zvýšenie ponuky a, naopak, pokles cien vyvoláva aj pokles ponuky.

Zimka (2004) vyjadruje funkciu ponuky nasledovne:

$$q = S(p)$$

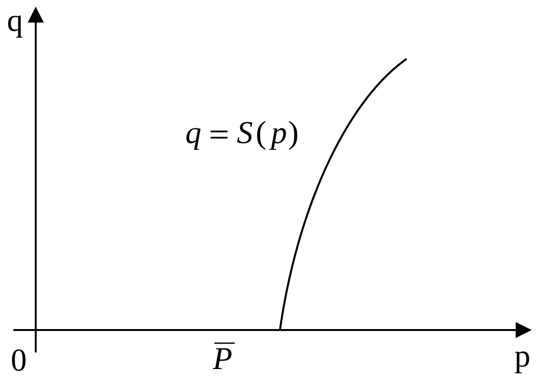
$$p = s(q),$$

kde p je predajná cena výrobku a q je ponúkané množstvo.

Ďalej uvádza, že z ekonomického významu premenných p a q vyplýva, že nemôžu nadobúdať záporné hodnoty a taktiež nemôžu neohraničene rásť. Na rozdiel od funkcie dopytu, pri ktorej premenná p mohla nadobúdať veľmi malé, prípadne teoreticky aj nulové hodnoty, pri funkcii ponuky sa premenná p pohybuje v intervale, ktorého ľavý koncový bod, označme ho písmenom $\overline{P}$, musí nadobúdať kladnú hodnotu. Zdôvodnenie tejto požiadavky sa nachádza v ekonomickom význame premennej p. Treba si uvedomiť, že funkcia ponuky (Obr. 2) modeluje správanie výrobcu v ekonomike voľného trhu. Výrobca si v žiadnom prípade nemôže dovoliť vyrábať svoj výrobok za nulovú alebo veľmi nízku cenu. Môže začať vyrábať až od takej ceny, ktorá mu zaručí uhradenie aspoň jeho fixných a variabilných nákladov na výrobu. Hodnota $\overline{P}$ je súčasne hodnotou, v ktorej funkcia ponuky nadobúda ešte nulovú hodnotu, t.j.

$S(\overline{P}) = 0$. Môžeme teda povedať, že hodnota $\overline{P}$ určuje hornú hranicu cien výrobku, pri ktorých si výrobca ešte nemôže dovoliť daný výrobok vyrábať.

$$p \geq \overline{P} \geq 0, \qquad q \geq 0, \text{ pričom } S(\overline{P}) = 0$$



Obr. 2

[Funkcia ponuky]

Dokonale konkurenčné trhy sú trhy, na ktorých jednotlivé firmy nemajú žiadny vplyv na trhové ceny výrobkov, ktoré predávajú, začínajú úvahu o dokonale konkurenčných trhoch **Frank a Bernanke (2002)**. Firma, ktorá je len jedna z mnohých predávajúcich výrobku, nemôže dúfať, že by si účtovala viac ako jej konkurenti, a nemá žiadny dôvod, aby požadovala menej. Dokonale konkurenčné firmy sa často označujú ako cenoví príjemcovia, pretože nie sú schopní ovplyvniť trhovú cenu.

Monopol je extrémny prípad nedokonalej konkurencie, keď jeden jediný výrobca ovláda produkciu v danom odvetví a sám si určuje cenu, pretože nemá konkurentov, tvrdia **Horehájová a Marasová (2007)**. Dodávajú, že ak je takýto stav výsledkom prirodzenej súťaže na trhu, hovoríme o prirodzenom monopole, ak jeho vzniku napomáha štát, ide o administratívny monopol, a ak je to dôsledok tajných dohôd podnikov o množstve a cene, ide o koluzívny monopol.

1.2 Funkcia jednej reálnej premennej a jej derivácia

Peller a kolektív (2002) nazývajú reálnou funkciou jednej reálnej premennej zobrazenie

$$f : A \to R, A \subset R ,$$

ktoré každému reálnemu číslu $x \in A$ priradí jediné reálne číslo $y \in R$, čo možno zapísať

$$f : y = f(x) .$$

Ďalej pokračujú tvrdením: Ak zobrazenie $f : A \to R$ je funkcia, množinu A budeme nazývať obor definície (definičný obor) funkcie f a označovať $D(f)$ a množinu všetkých $y \in R$, ku ktorým existuje $x \in A$, pre ktoré platí $y = f(x)$, oborom funkčných hodnôt, ktorú označíme $H(f)$. Funkcia f je určená (definovaná), ak je daný jej definičný obor $D(f)$ a pravidlo (výroková forma), podľa ktorého je každému číslu $x \in D(f)$ priradené práve jedno $y = f(x) \in R$. Číslo $f(x)$ nazývame hodnotu funkcie f v čísle *x* alebo funkčnou hodnotou v bode *x*.

Aparát diferenciálneho a integrálneho počtu nezávisle vytvorili Newton a Leibniz v 17. storočí. Diferenciálny a integrálny počet má dôležité aplikácie v mnohých oblastiach fyziky, prírodných a spoločenských vedách. Diferenciálny počet sa zaoberá priebehom funkcií, maximami a minimami, gradientmi, aproximáciami atď., tvrdia **Jones a Clamp (1999)**.

Trenčianska, Rúsková, Farkašová a i. (2006) začínajú definíciu derivácie nasledovne: Nech funkcia f je definovaná v okolí bodu x_0 a nech x je iné číslo z definičného oboru $D(f)$. Rozdiel $\Delta x = x - x_0$ nazývame prírastkom argumentu, ktorému odpovedá prírastok funkcie v bode x_0: $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Ďalej tvrdia, že limitu podielu prírastku funkcie ku prírastku argumentu, ak prírastok argumentu konverguje k nule, nazývame deriváciou funkcie f v bode x_0 a píšeme

$$f'(x_0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} .$$

Ak označíme $\Delta x = x - x_0$, tak môžeme písať

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

1.3 Funkcia dvoch reálnych premenných a jej parciálne derivácie

Množinu všetkých usporiadaných dvojíc reálnych čísel $[x, y]$ nazveme euklidovským dvojrozmerným priestorom (rovinou) a označíme ju E_2. Množinu všetkých usporiadaných trojíc reálnych čísel $[x, y, z]$ nazveme euklidovským trojrozmerným priestorom (priestorom) a označíme ju E_3, uvádzajú na úvod definície funkcie dvoch reálnych premenných **Országhová, Farkašová, Gregáňová a i. (2006)**. Uvádzajú, že f je reálnou funkciou dvoch reálnych premenných x, y, ak každému bodu $[x, y,] \in M$, pričom $M \subset E_2$, priradíme práve jedno číslo $z \in R$, čo zapíšeme $z = f(x, y)$. Množina M je definičným oborom funkcie f, premenné x, y sú nezávisle premenné alebo argumenty a z je závislá premenná. Definičným oborom funkcie dvoch reálnych premenných bude podmnožina všetkých usporiadaných dvojíc reálnych čísel $[x, y]$ z množiny $R \times R$ alebo R^2. Môžu ním byť samostatné body $[x, y] \in R^2$, časť roviny xy, napríklad priamka, kružnica, ale aj uhol, kruh, polrovina a podobne. Grafom funkcie dvoch reálnych premenných je väčšinou plocha v priestore E_3.

Velichová (2011) definuje parciálne derivácie nasledovným spôsobom: Nech $f(x, y)$ je funkcia dvoch premenných s oborom definície $M \subset E_2$ a nech $A = [x_0, y_0]$ je ľubovoľný vnútorný bod množiny M. Označme M_{y_0} množinu všetkých takých čísel x, pre ktoré $[x, y_0] \subset M$. Na množine M_{y_0} definujme funkciu g jednej premennej, ktorá je parciálnou funkciou z funkcie f, $g = f / M_{y_0}, g(x) = f(x, y_0)$. Pokračuje tvrdením, že ak má funkcia g v bode x_0 deriváciu, nazveme ju prvou parciálnou deriváciou funkcie $f(x, y)$ podľa premennej x v bode A a označujeme ju $f'_x(A)$ alebo $f'_x(x_0, y_0)$. Platí:

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

Rovnako definujeme parciálnu deriváciu funkcie $f(x, y)$ podľa premennej y v bode A a označujeme ju $f_y'(A)$ alebo $f_y'(x_0, y_0)$. Platí:

$$f_y'(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} .$$

1.4 Extrémy funkcie

1.4.1 Lokálne extrémy funkcie jednej premennej

Funkcia $y = f(x)$ má v bode $a \in D(f)$ lokálne maximum (minimum), ak existuje $\partial > 0$, že pre všetky $x \in (a - \partial, a + \partial)$ platí

$$f(x) \leq f(a) \qquad\qquad (f(x) \geq f(a)) .$$

Matejdes (2005) ďalej o lokálnych extrémoch funkcie jednej reálnej premennej dodáva, že ak pre $x \in (a - \partial, a + \partial)$, $x \neq a$ platí nerovnosť

$$f(x) < f(a) \qquad\qquad (f(x) > f(a)),$$

tak hovoríme o ostrom lokálnom maxime (minime) funkcie f v bode a.

Országhová a kolektív (2010) píšu, že určiť body, v ktorých funkcia dosahuje lokálne extrémy, môžeme pomocou vety, ktorá je nutnou podmienkou existencie lokálnych extrémov.

Nutná podmienka existencie lokálneho extrému

Ak má funkcia f v bode x_0 lokálny extrém a deriváciu $f'(x_0)$, potom platí $f'(x) = 0$. Tie body z definičného oboru funkcie f, v ktorých $f'(x) = 0$, sa nazývajú stacionárne body funkcie f. Funkcia môže, ale aj nemusí mať v stacionárnom bode lokálny extrém. Ako príklad autori uvádzajú funkciu $y = x^3$, ktorá je na celom definičnom obore rastúca.

1. postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému

Nech funkcia f má $f'(x_0) = 0$ a nech má aj $f'' = 0$. Ak $f''(x_0) < 0$ [$f''(x_0) > 0$], potom má funkcia f v bode x_0 lokálne maximum [lokálne minimum].

2. postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému

Nech pre funkciu f platí $f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ a $f^{(n)} \neq 0$. Ak n je nepárne číslo, funkcia f nemá v bode x_0 lokálny extrém. Ak n je párne číslo, funkcia f má v bode x_0 lokálny extrém, a to lokálne maximum, ak $f''(x_0) < 0$, alebo lokálne minimum, ak $f''(x_0) > 0$.

1.4.2 Lokálne extrémy funkcie viac premenných

Problematiku lokálnych extrémov funkcie viac premenných definujú **Fecenko a Sákalová (2004)** takto: Hovoríme, že funkcia $f : z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ má v bode $A \in D(f)$, lokálne maximum (minimum), ak existuje také okolie $\tilde{O}_\partial(A)$, že pre každý bod $X \in \tilde{O}_\partial(A) \cap D(f)$, platí

$$f(X) < f(A) \qquad\qquad [f(X) > f(A)].$$

Obidva pojmy, lokálne maximum a lokálne minimum, zahŕňajú pod pojem lokálny extrém. Ak vo vzťahoch $f(X) < f(A)$ a $[f(X) > f(A)]$ platí ostrá nerovnosť, tak hovoríme o ostrom lokálnom maxime (minime), uzatvárajú svoje tvrdenie.

1.4.3 Viazané extrémy

Podnikateľ v poľnohospodárstve je často obmedzovaný vo svojom podnikaní, napríklad výškou úveru, ktorý mu poskytne banka, alebo výmerou svojho pozemku, na ktorom podniká a pod., uvažujú **Országhová, Pechočiak, Gregáňová a i. (2008)**. Podobne to môže byť aj s funkciami, ktoré sú skúmané na zúženom definičnom obore, pričom niektoré ich vlastnosti môžu byť ovplyvnené alebo zmenené. Píšu, že pri hľadaní viazaných extrémov funkcie dvoch premenných môžeme postupovať dvomi spôsobmi:

1. ak sa z väzby $g(x, y) = 0$ dá jednoznačne vyjadriť funkcia $y = \varphi(x)$, resp. $x = \psi(y)$, túto dosadíme do funkcie $f(x, y)$ a dostaneme funkciu $F(x) = f(x, \varphi(x))$, resp. $G(y) = f(\psi(y), y)$, čo sú funkcie jednej

premennej x alebo y. Lokálny extrém funkcie $F(x)$, resp. $G(y)$ je viazaný lokálny extrém funkcie $f(x,y)$ s väzbou $g(x,y)=0$

2. Lagrangeova metóda sa používa najmä vtedy, ak sa z väzby $g(x,y)=0$ nedá vyjadriť žiadna z premenných x alebo y. Vytvoríme Langrangeovu funkciu

$$F(x,y) = f(x,y) + \lambda \cdot g(x,y).$$

Stacionárne body funkcie $F(x,y)$ nájdeme riešením sústavy rovníc

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 0$$

$$g(x,y) = 0$$

1.5 Použitie derivácie funkcie v ekonomických úlohách

Jednu z možností, ako vlastnosti diferenciálneho počtu využiť v rozličných ekonomických úlohách, popisujú **Országhová, Trenčianska, Pechočiak a i. (2004)**. Uvažujú takto:

Nech funkcia f je definovaná na množine M a nech $x_0, x_0 + \Delta x \in M$.

Podiel $$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

alebo $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

určuje priemernú pomernú zmenu funkcie f, ak argument x funkcie f sa zmení z x_0 na $x_0 + \Delta x$. Teda priemerná pomerná zmena funkcie určuje priemernú zmenu funkčných hodnôt danej funkcie pripadajúcich na jednotkovú zmenu argumentu x.

Ak prejdeme k limite v hore uvedenom vzťahu pre $\Delta x \to 0$ dostaneme

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

čo je okamžitá pomerná zmena funkcie f v bode x_0. Táto je približnou aproximáciou priemernej pomernej zmeny funkcie f za predpokladu, že sa argument funkcie f zmení z hodnoty x_0 o hodnotu Δx dostatočne blízku nule, pretože

$$f'(x_0) \doteq \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

V ekonomickej analýze sa často kladie $\Delta x = 1$, a tak derivácia funkcie f v bode x_0 aproximuje prírastok funkčnej hodnoty pri zmene argumentu z x_0 na $x_0 + 1$. Platí teda približný vzťah

$$f'(x_0) \doteq \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{1},$$

t. j. $$f'(x_0) \doteq \Delta f(x_0).$$

1.6 Ekonomická analýza

Ekonomická analýza často využíva kvantitatívne metódy pri hodnotení špecifických informácií v ekonomike, uvádza **Vitez (2011)**. Kvantitatívne metódy sú matematické alebo štatistické výpočty, ktoré poskytujú ekonómom ukazovatele pre porovnanie súčasného ekonomického stavu s predchádzajúcimi obdobiami. Ekonómovia často používajú rôzne typy matematických výpočtov, ktoré sú potom základom ich osobného rozhodovania, rôzne domnienky a teórie sú podporované zmysluplnými výpočtami.

1.6.1 Marginálna analýza

Marginálna analýza je časť ekonomickej analýzy zaoberajúca sa otázkou, či je ešte ekonomicky výhodné zväčšiť objem doterajšej činnosti, tvrdia **Fecenko a Pinda (1998)**. Podľa nich sú oprávnené len také akcie, ktoré vedú k zlepšeniu nového postavenia ekonomického subjektu v porovnaní s jeho predchádzajúcim stavom. Záujem ekonomického subjektu vyžaduje, aby sa o rozhodovaní pri rozšírení činnosti uvažovali nielen priemerné, ale aj marginálne veličiny. Marginálnou veličinou (*MV*) vzhľadom na premenlivý objem činnosti x nazývajú prírastok celkovej veličiny (*TV*) pripadajúci na jednotkový prírastok objemu činnosti x, t. j.

$$MV = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}, \quad TV = f(x)$$

Ak je funkcia f diferencovateľná, definujú marginálnu veličinu pomocou derivácie

$$MV = f'(x)$$

Funkciu vyjadrujúcu závislosť marginálnej veličiny od inej veličiny nazývajú marginálnou funkciou. Napr. ak celková veličina *TV* predstavuje celkové náklady, tak odpovedajúca marginálna veličina *MV* budú marginálne náklady.

1.6.2 Analýza produkcie

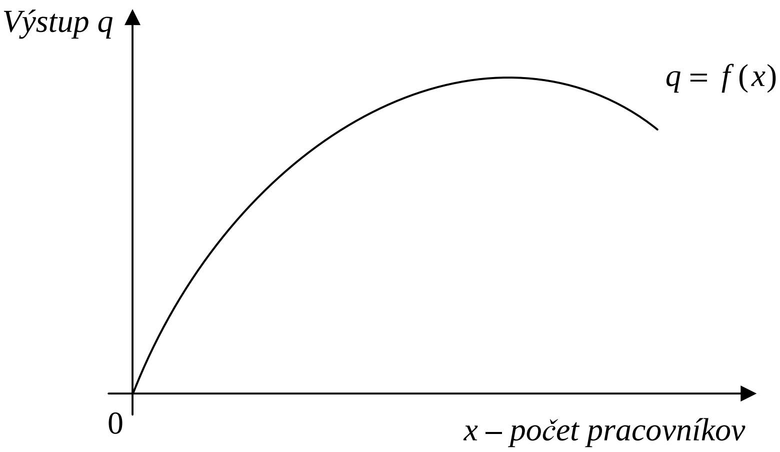
Produkčná funkcia vyjadruje technologický vzťah medzi inputom a outputom, pri ktorom sa transformujú vstupy na výstupy. Stanovuje maximálny objem produkcie (outputu), ktorý môže výrobný podnik vyprodukovať z rôznych kombinácií daného množstva výrobných faktorov (inputov). Účelom produkčnej funkcie je poskytovať informácie, aký objem výstupov môžeme vytvoriť pri premenlivých množstvách vstupov faktora. Produkčná funkcia vyjadruje maximálne technické možnosti, ktoré podnik má. Maximálny objem produkcie určený produkčnou funkciou označujeme v praxi ako výrobná kapacita, hovorí o produkčnej funkcii **Bielik (2006)**.

Samuelson a Nordhaus (2000) uvádzajú, že ak berieme do úvahy časové hľadisko, pri analýze výroby a nákladov rozlišujeme dve rozličné obdobia. Krátke obdobie definujú ako také, v ktorom firmy môžu prispôsobiť výrobu tak, že zmenia variabilné faktory, napríklad materiál a prácu, ale nemôžu zmeniť fixné faktory, napr. kapitál. Dlhé obdobie je podľa nich časový interval dostatočne dlhý na to, aby sa prispôsobili všetky faktory vrátane kapitálu.

Celkovým produktom nazývajú **Fendek a Fendeková (2008)** objem výstupu zodpovedajúci určitej úrovni variabilného vstupu a fixného vstupu. Uvádzajú, že objem celkového produktu q vypočítame na základe produkčnej funkcie, ktorej všeobecnú formuláciu môžeme v prípade fixného vstupu s veľkosťou x^0 a jedného variabilného vstupu s veľkosťou x zapísať takto:

$$q = f(x, x^0)$$

Maximálny objem produkcie vypočítaný pre určitú kombináciu variabilných a fixných vstupov na základe produkčnej funkcie (Obr. 3) budeme teda nazývať celkovým produktom. Priemerný produkt variabilného vstupu predstavuje množstvo produkcie (celkový produkt) zodpovedajúce jednotke variabilného vstupu. Marginálny produkt variabilného vstupu predstavuje prírastok celkového produktu zodpovedajúci jednotkovej zmene variabilného vstupu, pričom objem fixného vstupu sa nemení.



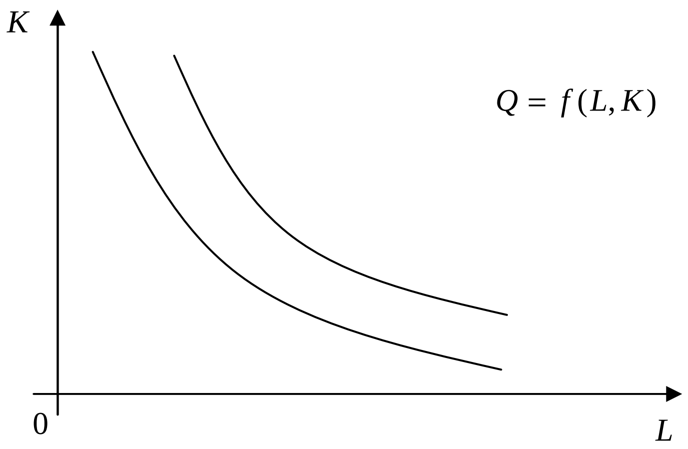
Obr. 3

[Krivka celkového produktu]

Charakteristickým znakom dlhého obdobia je, že firma môže meniť množstvo všetkých vstupov, ktoré používa vo výrobe, uvažujú **Hořejší, Soukupová, Macáková a i. (2008)**. V obmedzenom prípade iba dvoch vstupov (práca a kapitál) možno dlhodobú produkčnú funkciu vyjadriť ako

$$Q = f(L, K)$$

Grafickým znázornením dlhodobej produkčnej funkcie je izokvantová mapa (Obr. 4). Krivka, ktorá je tvorená všetkými kombináciami vstupov vedúcimi k tvorbe rovnakého výstupu, nazývame izokvanta. Izokvanta je vždy spojená s určitou konkrétnou úrovňou výstupu. Úroveň výstupu rastie s tým, ako sa posúva izokvanta doprava nahor.



Obr. 4

[Znázornenie produkcie pomocou izokvanty]

Sklon izokvanty vypovedá o schopnosti firmy nahrádzať jeden vstup druhým, zatiaľ čo výstup je nezmenený, píše **Perloff (2008)**. Sklon izokvanty sa nazýva marginálna miera technickej substitúcie (*MRTS*). Marginálna miera technickej substitúcie hovorí o tom, koľkými jednotkami kapitálu firma nahradí jednu jednotku práce pri konštantnej úrovni outputu. Pretože sklon izokvanty je klesajúci, marginálna miera technickej substitúcie je záporná.

1.6.3 Analýza nákladov a príjmov

Celkové náklady, ktoré firma musí vynaložiť na výrobu, sú determinované mnohými faktormi, uvádza **Zentková (2001)**. Podľa nej ekonómovia považujú za najdôležitejšie faktory ovplyvňujúce úroveň nákladov technológiu, cenu výrobných faktorov a objem vyrobenej produkcie. Potom funkcia vyjadrujúca závislosť variability vynaložených nákladov na variabilite determinantov sa nazýva nákladová funkcia. Formálne ju môžeme zapísať ako

$$TC = f(Q, T, P_f)$$

kde: TC – celkové náklady, Q – objem produkcie, T – technológia, P_f – ceny výrobných faktorov

Graficky sa znázorňujú náklady v dvojrozmernom grafe. Potom náklady sú definované ako funkciu outputu $TC = f(Q)$ a všetky ostatné faktory, ktoré determinujú náklady, sú konštantné. Ak sa niektorý z týchto faktorov zmení, graficky sa to prejaví ako posun krivky nákladov.

V závislosti na zmenách objemu výroby sa mení časť celkových nákladov – nazývajú sa náklady variabilné. Do variabilných nákladov patria jednotkové náklady a časť režijných nákladov. Pri manažérskych výpočtoch obvykle predpokladáme, že sa náklady vyvíjajú lineárne, uvádza **Synek a kol. (2007)**. Druhá časť nákladov je na zmenách objemu výroby nezávislá, nemení sa; nazývajú sa fixné náklady. Tieto náklady sú vyvolané nutnosťou zabezpečiť chod (prevádzkovú pohotovosť, výrobnú kapacitu) podniku ako celku. Fixné náklady vznikajú aj keď sa nič nevyrába.

Hraničné náklady (*MC*) vyjadrujú prírastok celkových nákladov, ktorý nastane zvýšením produkcie o jednu jednotku. Pri nízkych úrovniach outputu s rastom outputu klesajú (keďže na výrobu dodatočnej jednotky produkcie sú s rastom produktivity potrebné nižšie dodatočné náklady), po dosiahnutí svojho minima však začínajú so zvyšovaním outputu rásť. Hraničné náklady najskôr klesajú, keďže stroje a zariadenia nie sú budované na veľmi nízku úroveň outputu, pri ktorej je výroba nákladná, hovorí o hraničných nákladoch **Lisý a kol. (2002)**.

Celkový príjem (*TR*) je celková peňažná čiastka, ktorú firma získa predajom svojich výrobkov. Jeho veľkosť je daná súčinom ceny za jednotku výrobku *p* a predaným množstvom *x*. **Sekerka (2002)** ďalej dodáva, že v dokonalej konkurencii nemá firma možnosť výšku ceny ovplyvniť. Preto cena predstavuje pre firmu konštantnú, exogénne danú veličinu. Z toho vyplýva, že v týchto podmienkach je celkový príjem lineárnou funkciou predaného množstva. V podmienkach nedokonalej konkurencie cena nie je konštantná a závisí na predanom množstve, ktoré závisí od individuálneho dopytu po produkcii firmy. Príjem plynúci firme z jednej predanej jednotky sa nazýva priemerný príjem (*AR*), ktorý dostaneme, ak vydelíme celkový príjem objemom predanej produkcie.

Hraničný príjem (*MR*) je dodatočný príjem, ktorý by firma získala, keby predala jednu dodatočnú jednotku outputu. V podmienkach dokonalej konkurencie sa hraničný príjem rovná cene. V podmienkach nedokonalej konkurencie je hraničný príjem menší ako cena, pretože cena všetkých predtým predaných jednotiek by sa musela znížiť, aby sa predala dodatočná jednotka. **(Slovník pojmov: Hraničný príjem - marginal revenue MR, 2011)**

1.6.4 Analýza zisku a jeho maximalizácia

Zisk je cieľom a motívom podnikania. V prípade drobného výrobcu môže nad ziskovým hľadiskom prevážiť jeho celkové uspokojenie zo samostatnej nezávislej činnosti. Vo veľkých akciových spoločnostiach môže dôjsť k rozporu medzi záujmami platených manažérov a záujmami vlastníkov (akcionárov), tvrdia **Majdúchová a Neumannová (2008)**.

Fendek (1999) si myslí, že každá firma sa usiluje o takú organizáciu výroby, pri ktorej dosiahne maximálny zisk. Vytvorenie zisku je pre firmu prvoradým predpokladom úspešného fungovania.

Firma sa musí rozhodnúť, či vôbec vyrábať alebo nie, a ak sa rozhodne produkovať, musí si zvoliť taký objem outputu, ktorý jej zabezpečí najvyšší možný zisk, zamýšľajú sa nad maximalizáciou zisku **Árendáš, Lörincová, Zentková a i. (1999)**. Píšu, že zisk je daný rozdielom funkcie celkových príjmov a celkových nákladov. Potom úroveň produkcie, pri ktorej firma dosiahne maximálny zisk, nájdeme tam, kde je najväčšia vzdialenosť medzi *TR* a *TC*. Keďže firma chce vyrobiť maximálny zisk, musíme vyjsť z podmienky maximalizácie funkcie, t. j. jej prvá derivácia sa musí rovnať nule.

$$\frac{dZ}{dQ} = \frac{dTR}{dQ} - \frac{dTC}{dQ} = 0$$

Pretože $\frac{dTR}{dQ}$ je marginálny príjem a $\frac{dTC}{dQ}$ sú marginálne náklady, platí $MR - MC = 0$.

Z toho vyplýva že $MR = MC$

Firma bude dosahovať najvyšší zisk, ak bude vyrábať taký objem produkcie, pre ktorý je marginálny príjem rovnaký ako marginálne náklady.

1.6.5 Elasticita dopytu

Jedným zo závažných problémov v podnikaní je určiť vplyv na príjem v závislosti od zmeny ceny statku, uvádza **Jacques (2006)**. Cenovú elasticitu dopytu vysvetľuje pomocou jednoduchej úvahy o celkových príjmov podniku. Vychádza z predpokladu, že krivka dopytu podniku má klesajúci sklon. Ak firma znižuje cenu, potom zinkasuje menej za každú jednotku, ale počet predaných jednotiek sa zvyšuje. Pre celkový príjem platí vzťah $TR = P \times Q$, avšak z tohto vzťahu nie je hneď zrejmé, aký čistý vplyv na celkový príjem má pokles ceny a nárast množstva. Rozhodujúcim faktorom tu nie sú absolútne zmeny v cene alebo množstve, ale skôr proporcionálne alebo percentuálne zmeny. Intuitívne očakávajme, že v prípade, ak percentuálny nárast v predanom množstve je väčší ako percentuálny pokles ceny, firma zaznamená zvýšenie príjmu. Za týchto okolností môžeme povedať, že dopyt je elastický, pretože je relatívne citlivý na zmeny v cene. A podobne, dopyt je neelastický, ak nie je relatívne citlivý na zmenu ceny. V tomto prípade je percentuálna zmena v množstve menšia ako percentuálna zmena v cene. Firma potom môže zvýšiť príjmy tým, že zvýši cenu statku. Hoci v dôsledku toho dopyt klesá, nárast cien nahrádza zníženie objemu predaja a príjmy sa vzrastú. Samozrejme, môže sa stať, že percentuálne zmeny v cene a množstve sú rovnaké, takže príjmy zostávajú nezmenené. Takýto prípad označujeme ako jednotková elasticita dopytu. Citlivosť dopytovaného množstva na zmenu ceny kvantifikujeme definovaním cenovej elasticity dopytu:

$$E = \frac{\%\ \text{zmena v množstve}}{\%\ \text{zmena v cene}} = \frac{\%\ \Delta Q}{\%\ \Delta P}$$

Dopyt bude:

- neelastický, ak $E > -1$
- elastický, ak $E < -1$
- jednotkovo elastický, ak $E = -1$

2 Cieľ práce

Hlavným cieľom tejto záverečnej práce je poukázať na praktické použitie matematického aparátu v mikroekonómii so zameraním na diferenciálny počet. Téma vyžaduje zmapovať niektoré oblasti ekonómie, predovšetkým mikroekonómie, v ktorých sa dajú uplatniť matematické poznatky o funkciách jednej či dvoch reálnych premenných a následne využiť znalosť metód používaných v diferenciálnom počte funkcie jednej a dvoch reálnych premenných.

Splnenie vyššie uvedeného hlavného cieľa práce si vyžaduje splniť viacero parciálnych cieľov. Tieto ciele zhrnieme do nasledovných bodov:

- definovanie používaných a potrebných pojmov a metód a ich praktické vymedzenie
- vytvorenie aplikácií diferenciálneho počtu v ekonomických úlohách
- uviesť návod na riešenie týchto a im podobných úloh v praxi
- rozšírenie možností, ako riešiť náročné ekonomické situácie a rozhodovanie sa v týchto situáciách
- poukázanie na neoddeliteľnosť matematiky a ekonómie a následná ekonomická interpretácia použitého matematického aparátu
- možnosť využiť vytvorené aplikované úlohy vo vyučovaní matematiky a mikroekonómie na Slovenskej poľnohospodárskej univerzite (SPU) v Nitre

V neposlednom rade je cieľom tejto diplomovej práce zároveň aj overenie si poznatkov získaných štúdiom na Fakulte ekonomiky a manažmentu SPU v Nitre. Študijný program Ekonomika podniku ponúkal počas štúdia celý rad predmetov týkajúcich sa ekonomického myslenia a rozhodovania sa. Tie vyžadovali logické myslenie, schopnosť narábať s grafmi, čítať z nich a porozumieť im. V prevažnej väčšine z týchto študovaných predmetov bola použitá matematika, a preto každý dobrý ekonóm by mal matematike rozumieť. Z uvedených dôvodov je preto cieľom práce praktické poukázanie na adekvátnosť používania matematiky v ekonómii.

3 Metodika práce a metódy skúmania

3.1 Charakteristika predmetu skúmania a pracovný postup

Predmetom diplomovej práce je poukázanie na praktické použitie diferenciálneho počtu, pričom dôraz bude kladený na jeho rozmanité využitie v mikroekonomickej sfére so zameraním na výrobný podnik, ale taktiež na podnik poskytujúci služby.

Pracovný postup, podľa ktorého bola práca vyhotovená:

- výber okruhov mikroekonómie, ktorých by sa mala práca bezprostredne dotýkať (teória nákladov, teória produkcie, atď.)
- štúdium odbornej literatúry, ktorá je prepojená s predošlým bodom; využité boli pritom domáce zdroje, ale aj zahraniční autori, taktiež internet a rozličné odborné webové stránky; všetky použité zdroje sú uvedené v kapitole Použitá literatúra
- formulácia cieľa práce a následné stanovenie postupov pri jednotlivých výpočtoch; pri postupoch sú využívané rôzne vzorce a vzťahy, ktoré boli čerpané z naštudovanej literatúry
- vyhotovenie a následné vyriešenie modelových úloh, v ktorých je priamo poukázané na praktický význam a možnosti použitia diferenciálneho počtu; vzorce a rôzne kalkulácie boli editované pomocou softvérového doplnku Microsoft Equation v. 3.0; na hlbšie pochopenie konkrétnych situácií sú ilustrované grafy s využitím softvérov Mathematica v. 5.0 a Graphmatica v. 2.0g
- zhodnotenie a interpretácia výsledkov práce

3.2 Metódy vyhodnotenia a interpretácie výsledkov

Podniky, v ktorých prebiehajú jednotlivé situácie popísané modelovou úlohou, sú pre zjednodušenie a obmedzený rozsah diplomovej práce fiktívne. Všetky modelové úlohy, ktoré sú v práci uvedené, sú vykonštruované tak, aby čo najvernejšie odrážali reálne situácie a procesy, ktoré v podnikoch nastávajú. Náplňou týchto úloh je poukázať na význam využívania matematických metód v podniku. Cieľom úlohy je prísť ku konkrétnemu riešeniu a toto riešenie slovne a graficky popísať. Všeobecne boli pri práci použité nasledovné metódy:

- *analýza* – vypracovaniu práce predchádzalo štúdium danej problematiky, použitie tejto metódy umožnilo hlbšie a detailnejšie preštudovať tematiku
- *syntéza* – využitá pri riešení modelových úloh, v ktorých prišlo k uplatneniu naštudovaných poznatkov
- *grafická metóda* – využitá pri ilustrácii grafov, ktoré slúžia k lepšiemu pochopeniu a priblíženiu skúmanej úlohy
- *matematické metódy* – využitá bola funkcia jednej a dvoch reálnych premenných, diferenciálny počet (derivácia elementárnych funkcií, parciálne derivácie, Lagrangeova metóda) , logaritmická transformácia rovnice

3.3 Metodika výpočtov

Táto podkapitola sumarizuje všetky vzťahy, vzorce a postupy, pomocou ktorých boli úlohy riešené. Pre lepšie sa zorientovanie a ich prehľadnosť sú v jednotlivých aplikovaných úlohách použité vzorce a postupy uvedené v hranatých zátvorkách a odkazujú na túto podkapitolu 3.3 Metodika výpočtov.

3.3.1 Derivácia funkcie jednej reálnej premennej

Országhová, Pechočiak, Gregáňová a i. (2008):

[1] Deriváciou funkcie f (jednej reálnej premennej) v čísle x_0 nazývame číslo:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\text{; označujeme } f'(x_0) \text{ alebo } \left[\frac{df}{dx}\right]_{x=x_0}$$

[2] Parciálnou deriváciou funkcie $f(x,y)$ podľa x v bode $[x_0, y_0]$ nazývame limitu:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}\text{; označujeme } \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

[3] Parciálnou deriváciou funkcie $f(x,y)$ podľa y v bode $[x_0, y_0]$ nazývame limitu:

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$; označujeme $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

[4] V práci sú využité tieto vety o derivovaní:

a) $[c]' = 0$, c je číslo,

b) $[x^n]' = n.x^{n-1}$, kde n je reálne číslo

c) $[\ln x]' = \frac{1}{x}, \; x \in (0, \infty)$

Országhová, Trenčianska, Pechočiak a i. (2004)

[5] Derivácia funkcie v ekonomických úlohách:

$f'(x_0) \doteq \Delta f(x_0)$

3.3.2 Lokálne extrémy funkcie

Országhová, Pechočiak, Gregáňová a i. (2008):

[6] Nutná podmienka existencie lokálneho extrému funkcie jednej reálnej premennej:

$f'(x) = 0$

- ak $f''(x_0) < 0$, potom x_0 je lokálne maximum
- ak $f''(x_0) > 0$, potom x_0 je lokálne minimum

[7] Podmienka existencie lokálneho extrému funkcia dvoch reálnych premenných:

$$|D| = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0$$

- ak $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$, potom $[x_0, y_0]$ je lokálne maximum
- ak $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$, potom $[x_0, y_0]$ je lokálne minimum

[8] Výpočet determinantu 2. stupňa:

$$|D| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

3.3.3 Teória produkcie

Hořejší, Soukupová, Macáková a i. (2008):

[9] Celkový produkt – krátke obdobie, (*TP*) alebo (*Q*):

$Q = f(L, K_1)$, kde L je použité množstvo práce, K_1 je konštantné množstvo kapitálu , premennú K_1 vo funkcii nie je potrebné uvádzať $\Rightarrow$ $Q = f(L)$

[10] Priemerný produkt variabilného vstupu práce (*AP*):

$$AP_L = \frac{Q}{L}$$

[11] Hraničný (marginálny) produkt (*MP*):

a) hraničný produkt práce: $MP_L = \dfrac{\partial Q}{\partial L}$

b) hraničný produkt kapitálu: $MP_K = \dfrac{\partial Q}{\partial K}$, (platí iba pre dlhé obdobie)

[12] Celkový produkt – dlhé obdobie:

$Q = f(L, K)$, firma môže meniť množstvo všetkých vstupov

[13] Hraničná miera technickej substitúcie (*MRTS*) vyjadruje smernicu izokvanty:

$$MRTS = \frac{-\Delta K}{\Delta L} = \frac{-dK}{dL} = \frac{MP_L}{MP_K}$$

[14] Izokosta – priamka obsahujúca všetky kombinácie práce a kapitálu, ktoré môžu byť zaobstarané za dané celkové náklady:

$TC = wL + rK$, kde TC – celkové náklady, w – cena jednotky práce, r – cena jednotky kapitálu, L – objem použitej práce, K – objem použitého kapitálu

$TC = wL + rK \Leftrightarrow \dfrac{TC}{r} - \dfrac{w}{r} L = K \rightarrow$ smernicový tvar izokosty $\Rightarrow$ smernica izokosty: $-\dfrac{dK}{dL} = \dfrac{w}{r}$

[15] Nákladové optimum:

$$MRTS = \frac{w}{r} \Rightarrow \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{w}{r} \Rightarrow \frac{MP_L}{w} = \frac{MP_K}{r}$$

Országhová, Pechočiak, Gregáňová a i. (2008):

[16] Lagrangeova metóda:

$F(x,y) = f(x,y) + \lambda \cdot g(x,y) \rightarrow$ Lagrangeova funkcia

Stacionárne body funkcie $F(x,y)$ nájdeme riešením sústavy rovníc

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 0$$

$$g(x,y) = 0$$

Fendeková a kolektív (2009):

[17] Logaritmická transformácia funkcie:

$$f(z) = a \cdot x^n \cdot y^m \Leftrightarrow \ln f(z) = \ln a + n \ln x + m \ln y$$

3.3.4 Teória nákladov a príjmov

Hořejší, Soukupová, Macáková a i. (2008):

[18] Celkové náklady (TC):

a) $TC = wL + rK$

b) $TC = FC + VC$, kde FC – fixné náklady, VC – variabilné náklady

[19] Priemerné celkové náklady (AC):

$$AC = \frac{TC}{Q}$$

[20] Hraničné náklady (MC):

$$MC = \frac{dTC}{dQ}$$

[21] Celkový príjem (TR) v podmienkach:

a) dokonalej konkurencie: $TR = P \cdot Q$

b) nedokonalej konkurencie: $TR = dopytová\ \ funkcia \cdot q = p(q) \cdot q$

[22] Priemerný príjem (AR):

$$AR = \frac{TR}{Q}$$

3.3.5 Maximalizácia zisku a minimalizácia priemerných nákladov firmy

Országhová, Trenčianska, Pechočiak a i. (2004):

[23] Zisk firmy (TP):

$$TP(q) = TR(q) - TC(q)$$

[24] Podmienka maximalizácie zisku:

$$TP'(q) = 0$$

$$TR'(q) - TC'(q) = 0$$

$$TR'(q) = TC'(q)$$

[25] Podmienka minimalizácie priemerných nákladov:

$$AC'(q) = 0 \ \wedge \ AC''(q) > 0$$

3.3.6 Dopyt a cenová elasticita dopytu

Zimka (1998):

[26] Funkcia dopytu:

a) $q = D(p)$

b) $p = d(q)$

Árendáš, Lörincová, Zentková a i. (1999):

[27] Cenová elasticita dopytu (E_{PD}):

$E_{PD} = \dfrac{dX / X}{dP_x / P_x} = \dfrac{dX / dP_x}{X / P_x}$, kde X – dopytované množstvo, P_x – cena statku

4 Výsledky práce

V tejto časti diplomovej práce sú podrobne skúmané možnosti ekonomických aplikácií diferenciálneho počtu. Pomôžu nám k tomu už spomínané modelové situácie vo fiktívnych podnikoch.

4.1 Derivácia funkcie

Táto podkapitola nám poslúži k tomu, aby sme pochopili princípy derivovania funkcií. Metódy diferenciálneho počtu sú uplatnené v riešení ukážkových úloh.

4.1.1 Funkcia jednej reálnej premennej

PRÍKLAD 1

Zadanie: Daná je funkcia $f : y = 2 + x - 7x^2$.

Úloha: a) pomocou definície derivácie funkcie jednej reálnej premennej vypočítajme deriváciu funkcie

b) derivujme funkciu podľa vhodnej vety o derivovaní

Riešenie:

a)

Postupujeme podľa [1]:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(2 + x - 7x^2) - (2 + x_0 - 7x_0^2)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - 7x^2 - x_0 + 7x_0^2}{x - x_0} =$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{-7(x^2 - x_0^2) + x - x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{-7(x - x_0)(x + x_0) + x - x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)[-7(x + x_0) + 1]}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} [-7(x + x_0) + 1] = \lim_{x \to x_0} (-7x - 7x_0 + 1) = -7x_0 - 7x_0 + 1 = 1 - 14x_0$$

b)

Postupujeme podľa [4a] a [4b]:

$$f'(x): y' = (2 + x - 7x^2)' = 1 - 14x$$

Zhrnutie:

V oboch postupoch riešenia sme sa dopracovali k tomu istému výsledku, a to $1 - 14x$. Avšak pri použití vety o derivovaní konštanty [4a] a derivovaní polynomickej funkcie [4b] sme sa dopracovali k výsledku oveľa jednoduchšie a rýchlejšie, ako keď sme na riešenie použili definíciu derivácie [1]. Preto aj v práci budeme používať vety o derivovaní, nakoľko derivovanie cez limity je značne zdĺhavé.

4.1.2 Funkcia dvoch reálnych premenných

PRÍKLAD 2

Zadanie: Daná je funkcia $f: z = 4x^2 + 2x + 8 - 7y^3 + 3yx$

Úloha:

Vypočítajme parciálne derivácie tejto funkcie.

Riešenie:

1. Najskôr vypočítame parciálnu deriváciu podľa premennej *x*, [2], pričom postupujeme už podľa známych viet o derivovaní [4a] a [4b]. Vieme, že pri derivácii podľa premennej *x* nám premenná *y* vystupuje ako konštanta.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x + 2 + 3y$$

2. Teraz vypočítame parciálnu deriváciu funkcie *f* podľa premennej *y*, [3]. Postupujeme podobne, ibaže v tomto prípade ako konštanta vystupuje premenná *x*.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -21y^2 + 3x$$

Zhrnutie:

Derivovaním funkcie dvoch reálnych premenných vždy dostaneme dve funkcie. Je to zapríčinené deriváciou najskôr podľa prvej a následne podľa druhej premennej.

4.2 Dopyt a jeho cenová elasticita

APLIKOVANÁ ÚLOHA 1

Na veľmi jednoduchom príklade si teraz ukážeme, ako sa narába s funkciou dopytu, interpretujeme ekonomický význam jej koeficientov a následne vypočítame cenovú elasticitu dopytu.

Zadanie:

Podnik zameraný na poľnohospodársku prvovýrobu spotrebováva svoju produkciu obilnín pre zabezpečenie chodu živočíšnej výroby. Časť z nej však predáva miestnym drobným chovateľom. Vedenie podniku po dôkladnom prieskume zistilo, že spotrebiteľský dopyt po ich pšenici je popísaný funkciou $q = 1800 - 60p$. Pšenica je predávaná po metrických centoch (*mc*), t.j. 100 kg (jednotka metrický cent síce nie je uvedená v Medzinárodnej sústave jednotiek SI, v praxi je však pomerne často uplatňovaná najmä pri oceňovaní produktov poľnohospodárskej prvovýroby).

Úloha:

a) vyjadrime z rovnice dopytu veličinu p

b) vypočítajme cenovú elasticitu dopytu

Riešenie:

a)

Funkcia dopytu je vyjadrená podľa [26a]. Po prevedení rovnice v tvare $q = 1800 - 60p$ do tvaru vyjadrujúceho veličinu p funkcia nadobudne tvar:

$$p = 30 - \frac{1}{60}q \quad \rightarrow \text{ funkcia dopytu podľa [26b]}$$

Koeficient 30 reprezentuje tzv. šokovú cenu dopytu (Obr. 5, bod A). Pri takejto cene chovatelia nie sú ochotní nakupovať. Ide o cenu tak vysokú, že podnik nepredá ani jeden metrický cent zo svojej produkcie.

Z naštudovaného vieme, že funkcia dopytu má klesajúci sklon. V našom prípade na prvý pohľad vidno, že sa jedná funkciu lineárnu, u ktorej všeobecne platí, že sklon je pozdĺž celej krivky (v tomto prípade priamky) konštantný. Sklon priamky k osi x (pre nás os q) vypočítame prvou deriváciou funkcie:

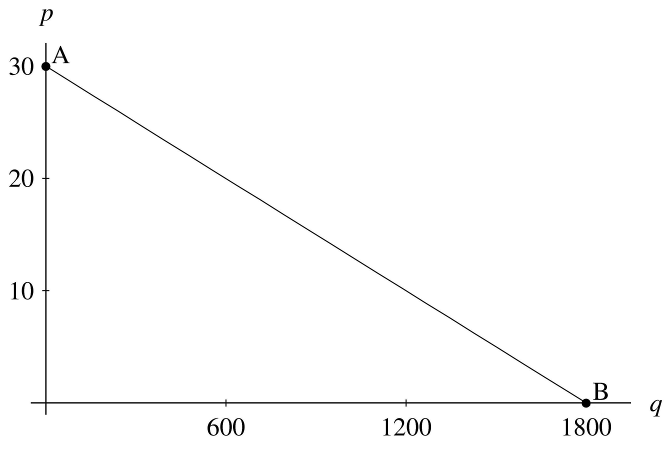
$$p' = \left(30 - \frac{1}{60}q\right)' = -\frac{1}{60}$$

Tento koeficient nám vyjadruje, že pokiaľ podnik zníži cenu o jedno euro za metrický cent, vzrastie ochota miestnych nakúpiť o 60 metrických centov viac. Rovnako to platí aj naopak.

Bod A znázorňuje extrémny trhový prípad, kedy cena je tak vysoká, že spotrebitelia nie sú ochotní kupovať. Predstavme si teraz prípad, kedy cena je natoľko nízka, že maximálne nasýti celý miestny trh a viac už nie je o ňu záujem. Za takýto extrém považujme nulovú cenu, t. j. podnik „rozdáva zadarmo". Dosaďme teda nulovú cenu inverznej funkcie dopytu:

$$q = 1800 - 60 \cdot 0 = 1800$$

Teda, ak podnik stanoví nulovú cenu, zo strany kupujúcich je záujem najviac o 1800 metrických centov, viacej trh neprijme, hoci sa rozdáva zadarmo. V praxi je pochopiteľne nemožné, aby sa podnik takto správal, v teórii je však potrebné interpretovať význam tohto koeficientu (bod B, Obr. 5).



Obr. 5

[Funkcia dopytu $p = 30 - \frac{1}{60}q$]

b)

Na určenie cenovej elasticity dopytu pri cene 25 € za metrický cent použijeme vzťah [27]. Na dosadenie do tohto vzťahu potrebujeme odvodiť dve neznáme.

1. Pri cenovej úrovni 25 €/mc vypočítajme dopytované množstvo:

$$q = 1800 - 60p = 1800 - 60 \cdot 25 = 300$$

2. Ešte nám zostáva vyjadriť pomer $\frac{dQ}{dP}$.

Vieme, že $\frac{dP}{dQ} = p' = -\frac{1}{60}$. Potom musí platiť, že $\frac{dQ}{dP} = \frac{1}{p'} = -60$, čo je vlastne sklon funkcie $q = 1800 - 60p$.

Po dosadení dostaneme:

$$E_{PD} = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q} = -60 \cdot \frac{25}{300} = -5$$

Cenová elasticita dopytu je teda rovná hodnote –5, čo znamená, že ak sa cena 25 € zvýši o 1%, tak dopytované množstvo po pšenici sa zníži o 5% a naopak.

4.3 Analýza produkcie podniku

APLIKOVANÁ ÚLOHA 2

Zadanie:

Podnik pôsobiaci v oblasti kovovýroby sa špecializuje na výrobu ozubených kolies. Vlastní 4 zariadenia, ktoré sú schopné obrábať kov. Finančná situácia podniku nie je natoľko priaznivá, že by si mohol narýchlo dovoliť kúpu ďalšieho stroja. Vo firme pracuje 16 zamestnancov, ktorých úlohou je obsluhovať zariadenia. Ide o pracovníkov s nižšou kvalifikáciou, ktorých je možné kedykoľvek nahradiť. Majiteľ tohto podniku odhadol funkciu celkovej produkcie ozubených kolies v tvare $Q = 7{,}5L^2 - 0{,}25L^3$, kde koeficient L predstavuje pracovníkov a Q celkovú produkciu.

Úlohy:

a) odvoďme funkciu priemerného produktu a vysvetlite ich význam pre spomínaný podnik

b) odvoďme funkciu marginálneho produktu a zistite, či je pre podnik výhodné prijať ďalších pracovníkov alebo naopak, časť pracovníkov prepustiť

Riešenie:

a)

Funkcia celkového produktu je daná podľa [9]. Zo zadania je zrejmé, že sa jedná o tzv. krátke obdobie, kedy jeden vstup je fixný (zariadenia na obrábanie kovov). Funkciu priemerného produktu práce odvodíme podľa vzťahu [10].

$$AP_L = \frac{Q}{L} = \frac{7{,}5L^2 - 0{,}25L^3}{L} = 7{,}5L - 0{,}25L^2$$

Pokiaľ ide o funkciu priemerného produktu, tak je významné vypočítať, aký počet pracovníkov zabezpečí maximálnu priemernú produkciu. Budeme postupovať podľa nutnej podmienky existencie extrému funkcie [6], t. j. prvá derivácia je rovná nule:

$$\left(AP_L\right)' = \left(7{,}5L - 0{,}25L^2\right)' = 0$$

$$7{,}5 - 0{,}5L = 0$$

$$L = 15 \Rightarrow AP_L\left(15\right) = 56{,}25$$

Stacionárny bod funkcie je $[15\,;56{,}25]$. Ešte je potrebné druhou deriváciou overiť, či v stacionárnom bode sa nachádza maximum alebo minimum. Podmienka maxima funkcie je:

$$\left(AP_L\right)'' = \left(7{,}5L - 0{,}25L^2\right)'' < 0$$

$$-0{,}25 < 0$$

Podmienka je splnená, môžeme teda konštatovať, že 15 pracovníkov zabezpečí maximálnu priemernú produkciu, čo predstavuje 56,25 ozubených kolies na jedného pracovníka (bod A, Obr. 6).

b)

Pomocou funkcie marginálneho produktu je možné popísať priebeh funkcie celkového produktu. Na odvodenie funkcie marginálneho produktu použijeme vzťah [11a]. Ako vieme, jedná sa o krátke obdobie, celkový produkt je teda závislý iba od jednej premennej, a to počtu pracovníkov. Z tohto dôvodu nie potrebné využiť parciálne derivácie ako je to uvedené v [11a].

$$MP = \frac{dQ}{dL} = (7{,}5Q^2 - 0{,}25Q^3)' = 15Q - 0{,}75Q^2$$

V súčasnosti podnik zamestnáva 16 pracovníkov, ich produkciu zistíme dosadením do funkcie celkového produktu: $Q(16) = 7{,}5 \cdot 16^2 - 0{,}25 \cdot 16^3 = 896$ ks ozubených kolies (bod B, Obr.6). Máme zistiť, či je výhodné prijať ďalších zamestnancov, ktorí môžu, ale aj nemusia zvýšiť úroveň výstupu. Opäť teda hľadáme maximálnu hodnotu funkcie. Zderivovanú funkciu celkovej produkcie, t. j. funkciu marginálneho produktu položíme rovnú nule a nájdeme korene rovnice:

$$MP = 15Q - 0{,}75Q^2 = 0$$

$$Q(15 - 0{,}75Q) = 0 \Rightarrow Q_1 = 0 \Rightarrow Q(Q_1) = 7{,}5 \cdot 0^2 - 0{,}25 \cdot 0^3 = 0$$

$$Q_2 = 20 \Rightarrow Q(Q_2) = 7{,}5 \cdot 20^2 - 0{,}25 \cdot 20^3 = 1000$$

Dostávame teda dva stacionárne body $[0\,;0]$ a $[20\,;1000]$. Overme, aké druhy extrémov predstavujú.

$$Q'' = MP' = \left(15Q - 0{,}75Q^2\right)' = 15 - 1{,}5Q$$

$$Q''(0) = MP'(0) = 15 - 1{,}5 \cdot 0 = 15 > 0$$

$$15 > 0 \Rightarrow \text{ lokálne minimum } [0\,;0]$$

$$Q''(20) = MP'(20) = 15 - 1{,}5 \cdot 20 = -15 < 0$$

$$-15 < 0 \Rightarrow \text{lokálne maximum } [20\,;1000]$$

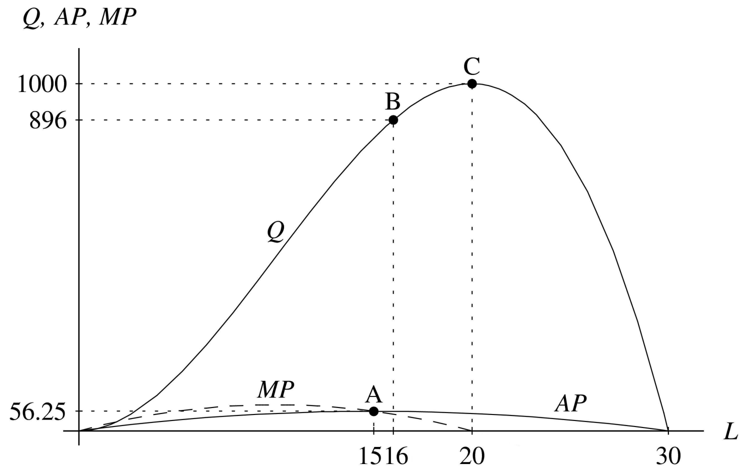
Celkový produkt je teda maximálny, pokiaľ do výrobného procesu zapojíme 20 pracovníkov (bod C, Obr. 6). Títo pracovníci sú schopní vyprodukovať 1000 ks ozubených kolies (16 pracovníkov produkovalo 896 ks). Konštatujeme teda, že ak má podnik záujem maximalizovať svoju produkciu, oplatí sa mu zamestnať ešte ďalších 4 pracovníkov.

A čo ak prijmeme 3 či 5 pracovníkov?

$$Q(16+3) = 7{,}5 \cdot 19^2 - 0{,}25 \cdot 19^3 = 992{,}75 \text{ ks}$$

$$Q(16+5) = 7{,}5 \cdot 21^2 - 0{,}25 \cdot 21^3 = 992{,}25 \text{ ks}$$

Úroveň produkcie rastie dovtedy, pokiaľ počet pracovníkov nedosiahne 20. Po prekročení tejto hodnoty výstup postupne klesá. Preto prijať viac ako 20 zamestnancov je pre podnik neefektívne. Za daných podmienok podnik nie je schopný vyprodukovať viac ako 1000 ks ozubených kolies. Vyššiu produkciu teda nemožno dosiahnuť dodatočným zamestnávaním nových pracovných síl. Zväčšiť rozsah outputu sa dá jedine nákupom ďalších strojov a ich zaradením do výroby. Toto však možno dosiahnuť jedine v dlhom období, kedy podnik má dostatok času na obmenu všetkých výrobných faktorov . Priemerný, marginálny a celkový produkt je znázornený na Obr. 6.



Obr. 6

[Funkcia celkového (*Q*), priemerného (*AP*)

a marginálneho (*MP*) produktu]

APLIKOVANÁ ÚLOHA 3

V tomto príklade sa zameriame na spomínané dlhé obdobie v produkčnej činnosti podniku. Premenlivý sa teda stane nielen faktor práce, ale aj faktor kapitálu. Využité preto budú parciálne derivácie funkcie dvoch reálnych premenných. Na reálne znázornenie tejto situácie by sa žiadalo použiť trojrozmerný graf. Je to ale pomerne komplikované, preto bude využitý graf dvojrozmerný a produkčná funkcia bude na priblíženie znázornená pomocou izokvant.

Zadanie:

Poslaním istého podniku je skladovanie materiálu inej firmy. Vo tomto podniku je zamestnaných 81 zamestnancov, ktorí pre potreby skladového hospodárstva využívajú 6 paletových vozíkov. Paletové vozíky slúžia na presun skladovaného materiálu v rámci podniku. V pravidelných časových intervaloch prichádza do podniku kamión, do ktorého pracovníci naložia skladovaný materiál. Podľa odhadu manažmentu podniku má podniková produkčná funkcia tvar $Q = 3\sqrt{L} + 0{,}5K$, kde L vystupujú ako pracovníci a premenná K predstavuje paletové vozíky. Za základnú jednotku produkcie podnik považuje jednu paletu plne naloženú skladovaným materiálom.

Úlohy:

a) odvoďme funkciu marginálneho produktu pre jednotlivé podnikové vstupy

b) vypočítajme hraničnú mieru technickej substitúcie

Riešenie:

a)

V produkčnej funkcii, ktorá je daná podľa [12], vystupujú dva výrobné faktory (vstupy). Na odvodenie ich marginálnych funkcií teda použijeme parciálne derivovanie. Najskôr derivujeme podľa jednej premennej, potom podľa druhej. Využijeme pritom vzťahy [11a] a [11b]:

1. $MP_K(Q) = \dfrac{\partial Q}{\partial K} = \dfrac{\partial\left(3\sqrt{L} + \frac{K}{2}\right)}{\partial K} = \dfrac{1}{2}$ $\rightarrow$ hraničný produkt kapitálu

2. $MP_L(Q) = \dfrac{\partial Q}{\partial L} = \dfrac{\partial\left(3\sqrt{L} + \frac{K}{2}\right)}{\partial L} = \dfrac{3}{2\sqrt{L}}$ $\rightarrow$ hraničný produkt práce

b)

Pri výpočte hraničnej miery technickej substitúcie (*MRTS*) postupujeme podľa vzťahu [13].

$$MRTS = \frac{MP_K}{MP_L} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2\sqrt{L}}} = \frac{\sqrt{L}}{3}$$

Podnik zamestnáva 81 pracovníkov, po dosadení do rovnice *MRTS* dostaneme:

$$MRTS = \frac{\sqrt{81}}{3} = 3$$

Hodnota hraničnej miery technickej substitúcie pre náš podnik je 3. To znamená, ak podnik zníži veľkosť kapitálu (paletové vozíky) o jednu jednotku, musí zvýšiť počet pracovníkov o troch.

Toto tvrdenie môžeme dokázať na veľmi jednoduchom príklade. Predstavme si, že na jednom z paletových vozíkov nastane technická porucha a vozík sa stane nepojazdný. Podnik chce ale zachovať plynulosť dodávok, t. j. chce, aby nakladanie materiálu do kamiónov pokračovalo v predchádzajúcom tempe, a to za každú cenu. Nezostáva mu teda nič iné ako substituovať, čiže nahradiť výpadok spôsobený poruchou vozíka pracovníkmi. Cez priame dosadenie potrebných hodnôt do produkčnej funkcie podniku teda vypočítajme, koľkými ľuďmi je možné nahradiť jeden vozík.

Za normálnych okolností:

$K = 6\,; \quad L = 81$

$$Q(81, 6) = 3\sqrt{L} + \frac{K}{2} = 3\sqrt{81} + \frac{6}{2} = 30 \text{ paliet}$$

Porucha jedného vozíka pri zachovaní produkcie:

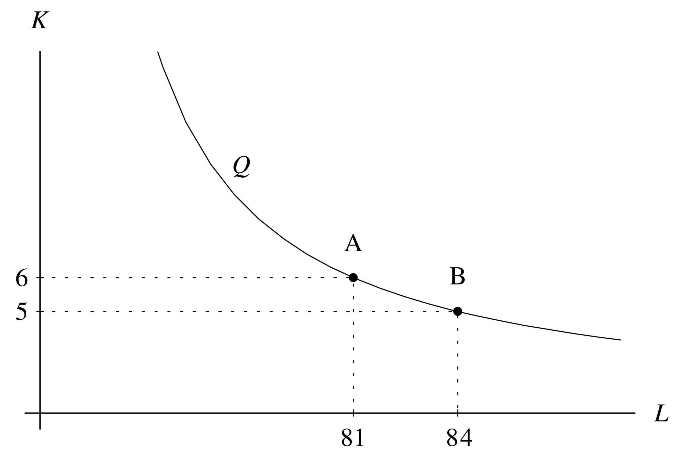
$Q = 30\,; \quad K = 5\,; \quad L = ?$

$$30 = 3\sqrt{L} + \frac{5}{2}$$

$$\frac{27{,}5}{3} = \sqrt{L}$$

$$L = 84{,}03 \doteq 84$$

Počet pracovníkov pri výpadku jedného vozíka sa teda zmenil z 81 na 84, t. j. o 3, čím sme dokázali platnosť výpočtu hraničnej miery technickej substitúcie. Hořejší, Soukupová, Macáková a i. (2008) uvádzajú, že vzťah [13] platí len pre veľmi malé zmeny vstupov (v ekonómii je za malú zmenu považovaná zmena o jednu jednotku). A práve z tohto dôvodu vznikla drobná odchýlka medzi výpočtom substitúcie cez *MRTS* a presným priamym dosadením do produkčnej funkcie.



Obr. 7

[Produkčná funkcia podniku pri produkcii 30 paliet]

4.4 Analýza nákladov a príjmov podniku

APLIKOVANÁ ÚLOHA 4

Najskôr si na veľmi jednoduchom príklade ukážeme, ako sa narába s nákladovými funkciami podniku a interpretujeme význam jednotlivých javov, ktoré sú s tým spojené.

Zadanie:

Podnik predáva na trhu svoje výrobky a jeho celkové náklady sú popísané nákladovou funkciou $TC(q) = 0{,}001q^3 + 0{,}5q + 250$.

Úlohy:

a) vyjadrime funkciu priemerných a marginálnych nákladov

b) zistime, kedy sú priemerné náklady na výrobu najnižšie

c) vypočítajme marginálne náklady pri výrobe 20 ks výrobkov

Riešenie:

a)

Funkciu priemerných nákladov získame podľa vzťahu [19]:

$$AC = \frac{TC}{q} = \frac{0{,}001q^3 + 0{,}5q + 250}{q} = 0{,}001q^2 + 0{,}5 + \frac{250}{q}$$

Funkciu marginálnych nákladov stanovíme podľa vzťahu [20]:

$$MC = \frac{dTC}{dQ} = \left(0{,}001q^3 + 0{,}5q + 250\right)' = 0{,}003q^2 + 0{,}5$$

b)

Stanovenie výroby, pri ktorej sú priemerné náklady minimálne si vyžaduje derivovať funkciu priemerných nákladov. Potom postupujeme podľa podmienky minima funkcie, t. j. prvá derivácie sa rovná nule a súčasne druhá derivácia má kladnú hodnotu.

$$AC' = \left(0{,}001q^2 + 0{,}5 + \frac{250}{q}\right)' = 0{,}002q - \frac{250}{q^2}$$

Postupujeme podľa nutnej podmienky existencie lokálneho extrému [6] alebo podľa [27]. Prakticky sa jedná o ten istý postup.

$$0{,}002q - \frac{250}{q^2} = 0\,,$$

$$q = 50 \Rightarrow AC(50) = 8\ €$$

Overme, či je druhá derivácia kladná:

$$AC'' = \left(0{,}002q - \frac{250}{q^2}\right)' > 0$$

$$AC''(50) = 0{,}002 + \frac{250}{50^3} > 0$$

$$AC''(50) = 0{,}004 > 0$$

Všetky podmienky sú splnené, konštatujeme teda, že ak podnik vyrába 50 výrobkov, jeho priemerné náklady, t. j. náklady na jeden výrobok, sú minimálne. Pri tomto výrobnom množstve vyrába podnik výrobky s priemernými nákladmi 8 € na jeden kus.

c)

Stanovme marginálne náklady pri produkcii 20 ks výrobkov:

$$MC(20) = 0{,}003 \cdot 20^2 + 0{,}5 = 1{,}7 \text{ €}$$

Ak zvýšime výrobu z 20 na 21 kusov, celkové náklady podniku vzrastú o 1,7 €. Postupovali sme pritom podľa [20].

Skúsme ale tento nárast kvantifikovať pomocou dosadenia do funkcie celkových nákladov:

$$TC(20) = 0{,}001 \cdot 20^3 + 0{,}5 \cdot 20 + 250 = 268$$

$$TC(21) = 0{,}001 \cdot 21^3 + 0{,}5 \cdot 21 + 250 = 269{,}761$$

$$\Delta TC = TC(21) - TC(20) = 1{,}761 \text{ €}$$

Vzniknutá malá odchýlka (0,061 €) medzi výpočtom cez ΔTC a MC dokazuje vzťah [20] a zároveň všeobecný vzťah [5] využívaný v marginálnej analýze, ktorý napovedá že derivácia funkcie vo zvolenom bode je približne rovná funkčnej zmene o jednu jednotku od tohto bodu.

APLIKOVANÁ ÚLOHA 5

Zadanie:

Podnik sa rozhoduje, či začať výrobu stolnotenisových rakiet. Výrobné oddelenie podniku začalo po detailnej analýze zistilo, že nákup výrobnej linky bude stáť 3 200 € a za prenájom výrobnej haly podnik zaplatí 1000 €. Ďalej zistili, že spotreba špeciálnej dreviny potrebná na výrobu jednej rakety bude predstavovať 10 €, gumové poťahy budú podnik stáť 15 € a lepiaci materiál bude spotrebovaný v hodnote 4 € na jednu raketu. Na prevádzku a obsluhu tejto linky je potrebný jeden zamestnanec, ktorý je platený úkolovou mzdou. Za každú vyrobenú raketu mu podnik vyplatí 1 €.

Úloha:

a) stanovme funkciu celkových nákladov podniku, ak vieme, že náklady sú lineárne závislé od počtu vyrobených rakiet

b) vyjadrime funkciu priemerných a marginálnych nákladov

c) porovnajme priemerné náklady pri výrobe 20 a 70 ks rakiet

Riešenie:

a)

Pre určenie funkcie celkových nákladov je potrebné rozdeliť náklady na dve položky [18b], a to náklady fixné a náklady variabilné. Fixné náklady (*FC*) sú také nákladové položky, ktoré sú potrebné k zabezpečeniu a zahájeniu výroby. Zo zadania je teda zrejmé, že pôjde o nákup výrobnej linky a prenájom haly.

$$FC = 3200 + 1000 = 4\,200\ €$$

Náklady variabilné (*VC*) sú spojené s počtom vyrobených kusov. V našom podniku teda variabilné náklady budú tvorené položkami ako spotreba dreviny, gumových poťahov, lepidla a výplata mzdy. Pretože sú závislé od počtu vyrobených kusov, prenásobíme ich súčet koeficientom množstva (*q*).

$$VC = (10 + 15 + 4 + 1) \cdot q = 30 \cdot q$$

Variabilné náklady teda vypovedajú o skutočnosti, že výroba jednej rakety bude podnik stáť 30 €.

Teraz môžeme určiť funkciu celkových nákladov, vieme pritom, že variabilné náklady sú lineárne závislé od vyrobeného množstva.

$$TC = FC + VC$$

$$TC = 4200 + 30q$$

b)

Priemerné náklady stanovíme podľa [19].

$$AC = \frac{TC}{q} = \frac{4200 + 30q}{q} = \frac{4200}{q} + 30$$

Marginálne náklady určíme podľa [20].

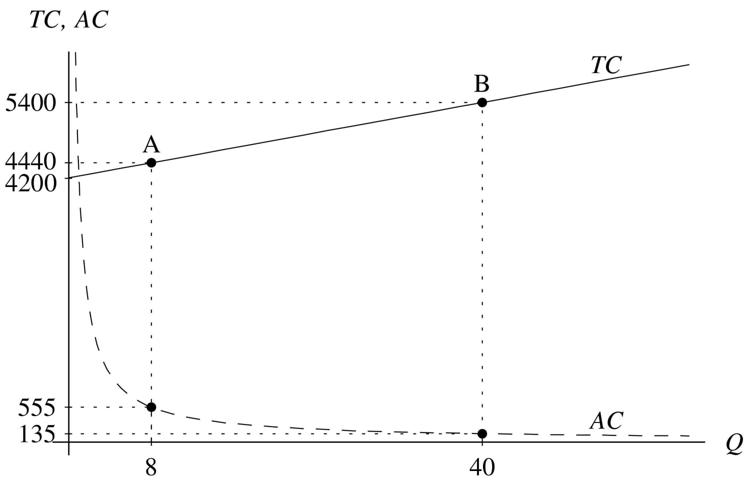
$$MC = \frac{dTC}{dQ} = (4200 + 30q)' = 30$$

Funkcia marginálnych nákladov vypovedá o náraste nákladov pri výrobe dodatočnej rakety. Celkové náklady vzrastú o 30 € s každou vyrobenou raketou, keďže sa jedná o náklady lineárne závislé. Zhodne o tom vypovedajú aj variabilne náklady.

c)

$$AC(8) = \frac{4200}{8} + 30 = 555\,€ \Rightarrow TC(8) = 4200 + 30 \cdot 8 = 4440 \text{ (bod A, Orb. 8)}$$

$$AC(40) = \frac{4200}{40} + 30 = 135\,€ \Rightarrow TC(40) = 4200 + 30 \cdot 40 = 5400 \text{ (bod B, Obr. 8)}$$



Obr. 8

[Funkcia celkových a priemerných nákladov podniku]

Z grafu môžeme pozorovať, že priemerné náklady klesajú s rastom produkcie. Pri výrobe 8 rakiet náklady na jeden kus predstavujú 555 €, zatiaľ čo pri výrobe 40 ks je to už len 135 €. Ďalšie zvyšovanie produkcie tak ešte zníži priemerný náklad. Oplatí sa teda vyrábať väčšie množstvo produkcie, ktoré zabezpečí nižšie priemerné náklady.

APLIKOVANÁ ÚLOHA 6

V aplikovanej úlohe č. 3 sme uviedli tzv. dlhodobú produkčnú funkciu. Pri skúmaní substitúcie kapitálu prácou sme poukázali na možnosti, aké môžu nastať pri výbere mixu výrobných faktorov. Avšak neuvažovali sme so žiadnymi obmedzeniami, ktoré sú neodmysliteľnou súčasťou podnikateľskej činnosti. Preto v nasledujúcom príklade budeme uvažovať o rozpočtovom (nákladovom) obmedzení. Našou snahou bude nájsť optimálnu kombináciu výrobných faktorov. Táto kombinácia zabezpečí maximálny objem produkcie pri neprekročení nákladového ohraničenia.

Zadanie:

Ako podklad opäť použijeme firmu podnikajúcu v oblasti skladovania materiálov pre iné podniky. Použité sú dva výrobné faktory, pracovná sila a paletové vozíky. Náklady na jedného zamestnanca (*w*) predstavujú 5 000 € ročne. Jeden paletový vozík s podnik kúpi za 2 000 € (*r*), doba jeho používania je jeden rok. Vedenie podniku odhadlo produkčnú funkciu v tvare $Q = 100 \cdot L^2 \cdot \sqrt[4]{K}$, kde L – pracovníci a K – paletové vozíky. Za jednotku produkcie podnik považuje jednu paletu plne naloženú materiálom.

Úlohy:

Vyjadrime kombináciu použitia výrobných faktorov tak, aby podnik maximalizoval objem produkcie, pričom nechce prekročiť náklady v sume 90 000 € ročne.

Riešenie:

Našou úlohou je teda nájsť optimálnu kombináciu zabezpečujúcu maximálnu produkciu pri určitom nákladovom obmedzení. Riešiť budeme:

$$Q = 100L^2 \cdot \sqrt[4]{K} \quad \rightarrow \quad \max$$

pri obmedzení $TC = 5000L + 2000K = 90\,000$ €

K vyriešeniu tejto úlohy sa môžeme dopracovať dvomi cestami:

1. Lagrangeova metóda [16]

Skôr ako zostavíme Lagrangeovu funkciu $F(L, K)$, vytvoríme logaritmickú transformáciu produkčnej funkcie podľa [17]: $100 \cdot L^2 \cdot \sqrt[4]{K} \rightarrow \ln 100 + 2\ln L + \frac{1}{4}\ln K$.

Lagrangeova funkcia má tvar:

$$F(L, K) = \ln 100 + 2\ln L + \frac{1}{4}\ln K + \lambda(5000L + 2000K - 90000)$$

Prirodzený logaritmus (ln) derivujeme podľa vety [4c]. Stacionárne body funkcie $F(L,K)$:

$$\frac{\partial F(L,K)}{\partial L} = \frac{2}{L} - 5000\lambda = 0$$

$$\frac{\partial F(L,K)}{\partial K} = \frac{1}{4K} - 2000\lambda = 0$$

$$5000L + 2000K - 90000 = 0$$

Riešením tejto sústavy 3 lineárnych rovníc o 3 neznámych bude usporiadaná trojica $[L; K; \lambda]$. Po vyriešení sústavy sme získali $\left[16\,; 5\,; \frac{1}{40000}\right]$. Lagrangeov multiplikátor (λ) si už všímať nebudeme a pokračujeme ďalej domnienkou, že v bode $[16\,; 5]$ sa nachádza lokálne maximum. Optimálna kombinácia použitia výrobných faktorov je 16 pracovníkov a 5 vozíkov; podniková produkcia je $Q(16{,}5) = 100 \cdot 16^2 \cdot \sqrt[4]{5} \doteq 38\,281$ paliet (bod A, Obr. 9). Ešte overme tento výpočet pomocou druhej derivácie, využijeme postup [7]:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial L^2} = -\frac{2}{L^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial L^2}(16) = -\frac{1}{128}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} = -\frac{4}{K^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial K^2}(5) = -\frac{4}{25}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial L \partial K} = 0$$

Zostavíme a vyriešime determinant podľa [8]:

$$|D| = \begin{vmatrix} -\frac{1}{128} & 0 \\ 0 & -\frac{4}{25} \end{vmatrix} = \frac{1}{800} \Rightarrow \text{ podmienka existencie extrému } |D| > 0 \text{ je splnená}$$

Podmienka pre lokálne maximum:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial L^2} = -\frac{2}{L^2} < 0$$

$$-\frac{1}{128} < 0$$

Všetky podmienky sú splnené, môžeme teda vyhlásiť, že ak podnik zamestná 16 pracovníkov a použije 5 vozíkov, dosiahne maximálnu možnú produkciu, a to 38 281 paliet ročne pri neprekročení nákladov 90 000 €.

2. Nákladové optimum [15]

Podmienka nákladového optima:

$$\frac{MP_L}{w} = \frac{MP_K}{r}$$

Odvodíme si MP_L a MP_K:

$$MP_L = \frac{\partial Q(L,K)}{\partial L} = 200 \cdot \sqrt[4]{K}\,L$$

$$MP_K = \frac{\partial Q(L,K)}{\partial K} = \frac{25L^2}{\sqrt[4]{K^3}}$$

Po dosadení do rovnice:

$$\frac{200 \cdot \sqrt[4]{K}\,L}{5000} = \frac{\frac{25L^2}{\sqrt[4]{K^3}}}{2000} \Rightarrow K = \frac{5}{16}L \rightarrow \text{ dosadíme do nákladového ohraničenia}$$

$$5000L + 2000\frac{5}{16}L = 90000$$

$$L = 16$$

$$K = \frac{5}{16} \cdot 16 = 5$$

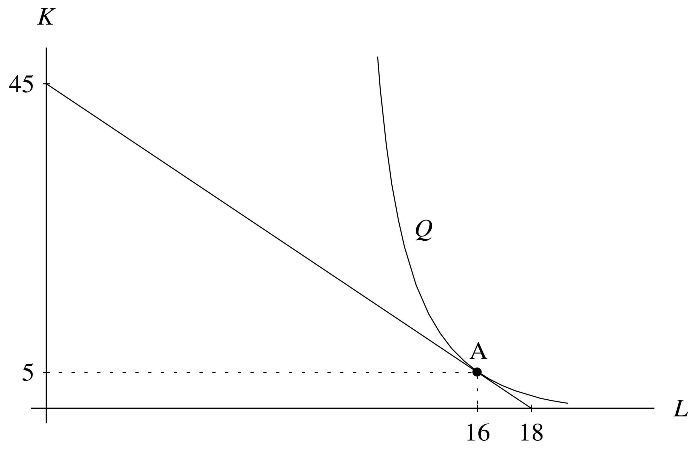
Opäť sme sa dopracovali k tomu istému riešeniu. Maximálna produkcia pri neprekročení nákladov 90 000 € bude dosiahnutá pri zamestnaní 16 pracovníkov a použití 5 paletových vozíkov (bod A, Obr. 9). Veľkosť produkcie potom musí byť identická, a to 38 281 paliet ročne.

Pre potrebu znázornenia grafu určíme smernicu nákladového ohraničenia – izokosty. Postupujeme podľa [14]:

$$K = \frac{TC}{r} - \frac{w}{r}L \Rightarrow K = 45 - \frac{5}{2}L$$

odtiaľ

- priesečník s osou L : $[18\,;0]$
- priesečník s osou K : $[0\,;45]$



Obr. 9

[Optimálna kombinácia výrobných faktorov

pri nákladovom obmedzení]

APLIKOVANÁ ÚLOHA 7

Zadanie:

Obchod so spotrebnou elektronikou má vo svojom sortimente okrem iného aj náplne do atramentových tlačiarní. Prieskum trhu ukázal, že dopyt po nich popisuje funkcia $D(p): q = 680 - 40p$.

Úlohy:

a) vypočítajme funkciu celkových príjmov z predaja atramentových náplní

b) zistime, aké množstvo náplní je potrebné predať, aby bol príjem z predaja maximálny a akú veľkosť bude mať takýto príjem

c) vypočítajme, akú cenu obchod stanoví za podmienky, že chce maximalizovať príjem

d) uvažujme že, sa nachádzame dokonale konkurenčnom prostredí; zistime čo sa zmení, ak sa obchod rozhodne stanoviť cenu na 10 € za jednu náplň

Riešenie:

a)

Zo zadania vyplýva, že obchod predáva na trhu, kde existuje nedokonalá konkurencia, t.j. príjem je závislý od predaného množstva, ktoré závisí od individuálneho dopytu. Pri stanovení funkcie celkového príjmu potom budeme postupovať podľa [21b]. Ešte skôr ako dosadíme do tohto vzťahu, je potrebné vyjadriť z rovnice dopytu veličinu *p*.

$$q(p) = 680 - 40p$$

po úpravách : $p(q) = 17 - \frac{1}{40}q$

Teraz môžeme využiť vzťah [21b]. Funkcia celkových príjmov má konečný tvar:

$$TR(q) = p(q)\,.\,q = \left(17 - \frac{1}{40}q\right)\cdot q = 17q - \frac{1}{40}q^2$$

b)

Našou úlohou je vypočítať, pri akom predanom množstve je príjem maximálny. Nejedná sa o nič iné ako o nájdenie lokálneho extrému funkcie, a to lokálneho maxima. Počítajme už podľa známeho postupu [6]:

$$TR' = \left(17q - \frac{1}{40}q^2\right)' = 0$$

$$17 - \frac{1}{20}q = 0$$

$$q = 340 \Rightarrow TR(340) = 17\cdot 340 - \frac{1}{40}\cdot 340^2 = 2\,890\,€$$

Stacionárny bod funkcie je $[340\,;2890]$. Ešte je potrebné druhou deriváciou overiť, či v stacionárnom bode sa nachádza maximum alebo minimum. Podmienka maxima funkcie je:

$$(TR)'' = \left(17q - \frac{1}{40}q^2\right)'' < 0$$

$$-\frac{1}{20} < 0$$

Druhá derivácia nadobúda zápornú hodnotu, ide teda o lokálne maximum. Príjem z predaja bude maximálny práve vtedy, ak podnik predá 340 kusov náplní. Veľkosť príjmu bude 2 890 € (bod A, Obr. 10).

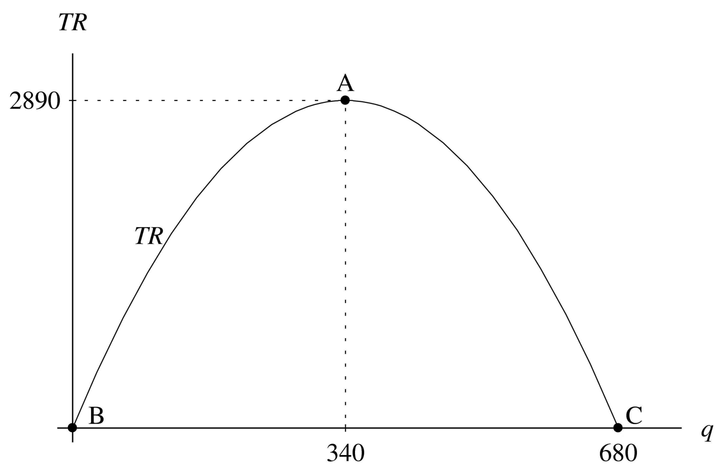
c)

Stanovenie ceny v bode, kedy celkový príjem je maximálny, získame dosadením príslušného predaného množstva do funkcie dopytu:

$$p(340) = 17 - \frac{1}{40} \cdot 340 = 8{,}5\,€$$

Tento výsledok bude zhodný s výpočtom priemerného príjmu z predaja, pretože všeobecne sa cena rovná príjmu z predaja jedného kusu. Postupujme podľa [22]:

$$AR(340) = \frac{TR(340)}{340} = 8{,}5\,€$$



Obr. 10

[Funkcia celkového príjmu $TR(q) = 17q - \frac{1}{40}q^2$]

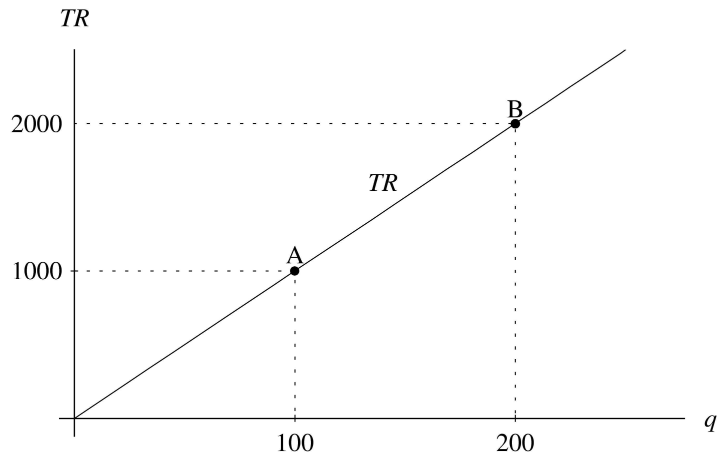
Body B a C na Obr. 10 reprezentujú stav, kedy celkové príjmy sú nulové. Je však medzi nimi zásadný rozdiel. V bode B obchod nepredá ani jednu náplň, pretože stanovil privysokú cenu a spotrebitelia nie sú ochotní za takúto cenu nakupovať. Bod C zasa predstavuje stav, kedy obchod síce predá všetky svoje náplne, ale za nulovú cenu, z ktorej mu neplynie žiadny príjem, t. j. náplne rozdáva zadarmo. Opäť, v praxi je nemožné a z ekonomického hľadiska neprípustné takéto správanie. Matematicky interpretujeme bod C ako priesečník s osou q.

d)

Na dokonale konkurenčnom trhu platí jedna trhová cena a žiadny zo subjektov nemá takú silu ani vplyv, aby ju zmenil. Trhová cena teda 10 € a za túto cenu sa predáva na všetkých trhoch s atramentovými náplňami. Pri stanovení funkcie celkového príjmu postupujeme podľa [21a]:

$$TR = P \cdot Q = 10 \cdot Q$$

Z uvedenej funkcie vidíme, že príjem podniku v dokonale konkurenčnom prostredí je závislý výlučne od predaného množstva. čím väčšie množstvo podnik realizuje, tým väčšie sú jeho príjmy (body A, B, Obr. 11).



Obr. 11

[Funkcia celkového príjmu $TR(q) = 10q$]

4.5 Maximalizácia zisku firmy v podmienkach dokonalej konkurencie

APLIKOVANÁ ÚLOHA 8

Zadanie:

V tomto príklade bližšie rozanalyzujeme podnik popísaný v aplikovanej úlohe č. 2. Pripomenieme, že pôsobí v oblasti kovovýroby, využíva 4 stroje (*K*) na obrábanie kovov, ktoré vyrábajú ozubené kolesá a zamestnaných je 16 pracovníkov (*L*). Práca vystupuje ako faktor variabilný a kapitál (stroje) ako faktor fixný. Produkčná funkcia má tvar $Q = 7{,}5L^2 - 0{,}25L^3$. Svoju produkciu na dokonale konkurenčnom trhu predáva za cenu 75 €/ks. Mzda zamestnanca v krátkom období predstavuje 1 070 € a kúpa jedného stroja predstavuje pre firmu náklad 10 000 €.

Úlohy:

a) vypočítajme, koľko zamestnancov by mal podnik zamestnať, ak jeho prioritou je maximalizácia zisku
b) porovnajme výšku zisku pri aktuálnom počte pracovníkov, t. j. 16 a pri počte, ktoré maximalizuje zisk

Riešenie:

a)

Na vyriešenie tejto úlohy sa musíme dopracovať k funkcii zisku (*TP*). Na jej odvodenie použijeme vzťah [23]:

$$TP = TR - TC$$

Nepoznáme ani celkové tržby *TR*, ani celkové náklady *TC*. Vieme ale, že firma je v dokonale konkurenčnom prostredí, preto si môžeme *TR* odvodiť podľa [21a]:

$$TR = P \cdot Q$$

Produkcia je realizovaná za cenu $P = 75$ €/ks a Q predstavuje množstvo produkcie – produkčná funkcia. Celkové tržby sa teraz stanú funkciou množstva práce, produkcia tak bude tržby ovplyvňovať nepriamo, a to cez počet pracovníkov. Po dosadení:

$$TR = 75 \cdot \left(7{,}5L^2 - 0{,}25L^3\right)$$

$$TR = 562{,}5L^2 - 18{,}75L^3$$

Celkové náklady (*TC*) si vieme odvodiť pomocou vzťahu [18b] alebo [18a]. Podstata veci je tá istá.

$TC = FC + VC$, prípadne $TC = rK + wL$

Fixné náklady podniku predstavujú 4 stroje, každý v hodnote 10 000 €:

$$FC = rK = 4 \cdot 10\,000 = 40\,000\ €$$

Ako variabilné náklady vystupujú v podniku náklady na mzdy pracovníkov. Mzda je 1 070 €. Avšak nevieme, koľko pracovníkov je potrebných k maximalizácii zisku, preto počet pracovníkov bude vystupovať ako premenná vo variabilných nákladoch (čím viac pracovníkov, tým vyššie variabilné náklady). Po dosadení:

$$VC = wL = 1070L$$

Celkové náklady (*TC*) podniku sú teda dané funkciou:

$$TC = 40\,000 + 1070L$$

Teraz nám už nič nebráni k zostaveniu funkcie zisku (*TP*), využijeme vzťah [23]:

$$TP = TR - TC$$

$$TP = 562{,}5L^2 - 18{,}75L^3 - (40000 + 1070L)$$

$$TP = -18{,}75L^3 + 562{,}5L^2 - 1070L - 40000$$

Odvodili sme tak funkciu celkového zisku, teraz ideme hľadať jej maximálnu hodnotu. Postupujeme podľa už známej nutnej podmienky existencie lokálneho extrému [6], t. j. prvá derivácia je rovná nule. Tiež o tom vypovedá vzťah [24]:

$$TP' = \left(-18{,}75L^3 + 562{,}5L^2 - 1070L - 40000\right)' = 0$$

$$-56{,}25L^2 + 1125L - 1070 = 0$$

odtiaľ $L_1 = 19$

$$L_2 = 1$$

Dostávame 2 stacionárne body. Druhou deriváciou overme, o aké lokálne extrémy sa jedná.

$$TP'' = -112{,}5L + 1125$$

$$TP''(19) = -112{,}5 \cdot 19 + 1125$$

$$TP''(19) = -1012{,}5 < 0 \Rightarrow \text{lokálne maximum}$$

$$TP''(1) = -112{,}5 \cdot 1 + 1125$$

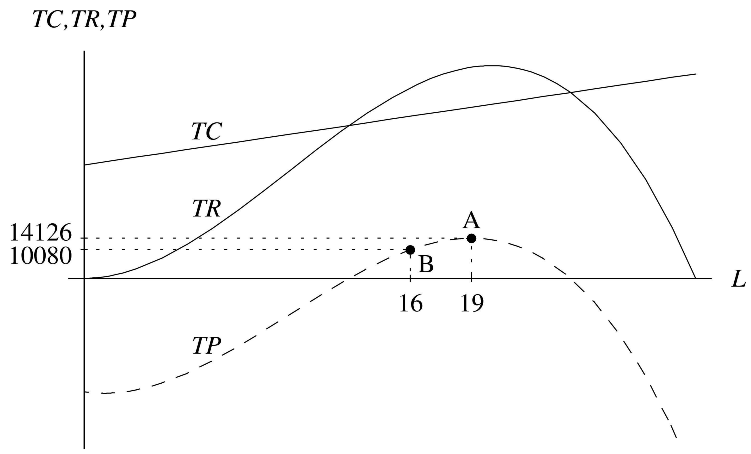
$$TP''(1) = 1012{,}5 > 0 \Rightarrow \text{lokálne minimum}$$

V ekonomických aplikáciách má zmysel hľadať lokálne maximum. Vypovedá nám, že ak firma zamestná 19 pracovníkov, v krátkom období dosiahne maximálny možný zisk, a to $TP(19) = -18{,}75 \cdot 19^3 + 562{,}5 \cdot 19^2 - 1070 \cdot 19 - 40000 \doteq 14126$ € (bod A, Obr. 12).

b)

Momentálne firma zamestnáva 16 zamestnancov, jej zisk teda predstavuje:

$TP(16) = -18{,}75 \cdot 16^3 + 562{,}5 \cdot 16^2 - 1070 \cdot 16 - 40000 = 10\,080$ € (bod B, Obr. 12)



Obr. 12

[Funkcia nákladov, tržieb a zisku podniku]

Všimnime si na grafe, že všade tam, kde leží krivka tržieb *TR* nad krivkou nákladov *TC*, krivka zisku *TP* nadobúda kladné hodnoty a naopak. Zdôvodnené je to známym pravidlom, že ak $TR > TC$, potom firma tvorí zisk, v opačnom prípade stratu.

Zisk, ktorý firma môže dosiahnuť pri zapojení 19 pracovníkov do výroby, prevyšuje ten aktuálny o 4 046 €. Ak sa spätne pozrieme do aplikácie č. 2, zistíme, že firma je schopná dosiahnuť najvyššiu možnú produkciu pri zamestnaní 20 pracovníkov (bod C, Obr. 6). Zisk bude vtedy predstavovať $TP(20) = 13\,600$ €, čo je ale o 526 € menej ako ten maximálny. Racionálna firma by preto uprednostnila ziskový cieľ pred cieľom produkčným.

4.6 Maximalizácia zisku firmy v podmienkach nedokonalej konkurencie

APLIKOVANÁ ÚLOHA 9

Zadanie:

S nedokonalou konkurenciou sme sa stretli už v aplikovanej úlohe č. 7, kedy obchodný podnik predával náplne do atramentových tlačiarní. Uvažujme teraz aj o jeho nákladových položkách a priblížme si tak priebeh jeho ziskovej funkcie. Celkové náklady obchodu na obstaranie atramentových náplní vrátane nákladov na zabezpečenie chodu predajne popisuje funkcia $TC = 0{,}00001q^3 - 0{,}01q^2 + 6{,}2q + 700$. Pripomeňme, že funkcia dopytu po náplniach má tvar $p = 17 - 0{,}025q$.

Úlohy:

a) zistime, koľko náplní má podnik obstarať a realizovať, pokiaľ chce dosiahnuť maximálny zisk zo svojej činnosti

b) vypočítajme, aká cena zabezpečí najvyšší zisk

c) porovnajme výšku maximálneho zisku so ziskom pri maximalizácii príjmov

Riešenie:

a)

Či sa podnik nachádza v prostredí dokonale alebo nedokonale konkurenčnom, nič to nemení na aktuálnosti vzťahov [23] a [24]. Funkciu nákladov máme danú, zostáva nám dopracovať sa k funkcii príjmov. V nedokonalej konkurencii pre celkový príjem platí vzťah [21b].

$$TR(q) = p(q)\,.\,q = (17 - 0{,}025q)\cdot q = 17q - 0{,}025q^2$$

Teraz môžeme použiť známy vzťah [23]:

$$TP = TR - TC$$

$$TP = 17q - 0{,}025q^2 - (0{,}00001q^3 - 0{,}01q^2 + 6{,}2q + 700)$$

$$TP = -0{,}00001q^3 - 0{,}015q^2 + 10{,}8q - 700$$

Dopracovali sme sa k funkcii zisku *TP*. Opäť ako v podmienkach dokonalej konkurencie postupujeme podľa pravidla [24], čo je vlastne nutná podmienka existencie lokálneho maxima.

$$TP' = \left(-0{,}00001q^3 - 0{,}015q^2 + 10{,}8q - 700\right)' = 0$$

$$-0{,}00003q^2 - 0{,}03q + 10{,}8 = 0$$

odtiaľ $q_1 \doteq -1281$

$q_2 \doteq 281$

Oba korene rovnice predstavujú stacionárne body. Overme druhou deriváciou, o aké lokálne extrémy ide.

$$TP'' = -0{,}00006q - 0{,}03$$

$$TP''(-1281) = -0{,}00006\cdot(-1281) - 0{,}03$$

$$TP''(-1281) = 0{,}04686 > 0 \Rightarrow \text{lokálne minimum}$$

$$TP''(281) = -0{,}00006\cdot 281 - 0{,}03$$

$$TP''(281) = -0{,}04686 < 0 \Rightarrow \text{lokálne maximum}$$

Funkcia zisku dosahuje maximálnu hodnotu, ak $q = 281$. Ak podnik obstará a predá takýto počet náplní, jeho zisk dosiahne najvyššiu možnú hodnotu, a to $TP(281) = -0{,}00001\cdot 281^3 - 0{,}015\cdot 281^2 + 10{,}8\cdot 281 - 700 \doteq 928{,}5$ € (bod A, Obr. 13).

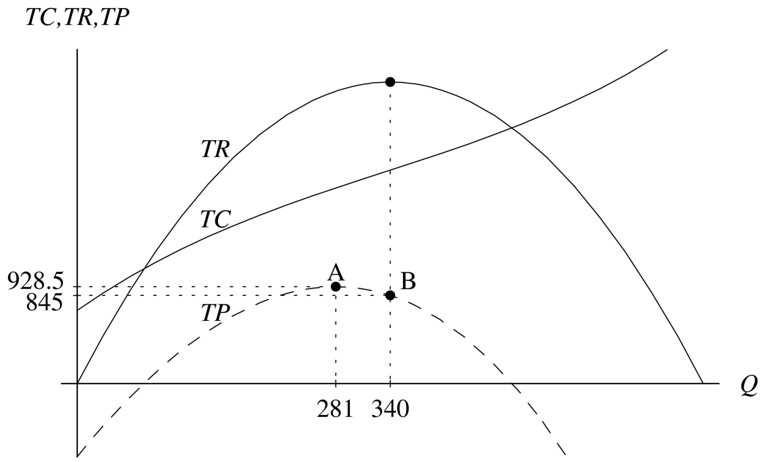
b)

Množstvo, ktoré by mal obchod realizovať je teda 281 ks. Po dosadení toho množstva do funkcie dopytu vypočítajte cenu, ktoré naplní cieľ maximalizácie zisku.

$$p(281) = 17 - 0{,}025 \cdot 281 = 9{,}975\text{€} \Rightarrow \text{optimálna cena je približne 10 €/ks}$$

c)

Z aplikácie č.7 sme zistili, že obchod maximalizuje svoj príjem, keď predá 340 náplní, zisk bude $TP(340) = -0{,}00001 \cdot 340^3 - 0{,}015 \cdot 340^2 + 10{,}8 \cdot 340 - 700 \doteq 845$ € (bod B, Obr. 13).



Obr. 13

[Funkcia nákladov, tržieb a zisku obchodu]

Záver

V aplikovaných úlohách boli riešené situácie z praxe, z ktorými sa môže stretnúť každý absolvent ekonomickej fakulty. Každý manažér, či už sa jedná o čerstvého absolventa bez riadiacich skúseností alebo ide o skúseného manažéra na ktoromkoľvek stupni riadenia, každý z nich musí vo svojej práci neustále rozhodovať. Tieto praktické úlohy, ktoré sú výstupom tejto práce by tak mohli dopomôcť manažérom k takým rozhodnutiam, ktoré prinášajú úspech v podobe optimálnej výšky zisku, určenia optimálneho výrobného množstva, stanovenia ideálneho počtu zamestnancov a podobne. Jedine vtedy môže firma o sebe vyhlásiť, že racionálne využíva svoje zdroje.

Prvá aplikovaná úloha pojednávala o dopyte. Správanie spotrebiteľa vystihuje funkcia dopytu. Vďaka funkcii jednej reálnej premennej sme mohli popísať správanie miestnych chovateľov. Ako reagoval trh na zmeny cien sme ukázali vďaka cenovej elasticite dopytu. V druhej úlohe sme mali rozhodnúť, koľko pracovníkov je vhodné zamestnávať. Cieľom úlohy bolo zistiť, či podnik racionálne využíva existujúce kapitálové zdroje. Podnik nemohol narýchlo meniť počet výrobných zariadení, preto jediná cesta optimalizácie výroby viedla cez počet pracovníkov. Optimálne využívanie existujúcej kapacity zabezpečilo vytvorenie ďalších štyroch pracovných miest. Tretia úloha sa týkala produkcie firmy v dlhom období. Firma mohla meniť všetky dostupné výrobné faktory, nielen prácu ako v predchádzajúcej úlohe. V tzv. dlhom období sme mali zistiť hraničnú mieru technickej substitúcie, ktorá nám vypovedala o schopnosti podniku nahrádzať kapitál ľudským faktorom. Na základe tohto ukazovateľa manažér pozná technologickú úroveň podniku. Čím ťažšie sa stroje a zariadenia nahrádzajú ľudskou prácou, tým je závislosť podniku na kapitále a technológii vyššia a naopak. V štvrtej, piatej a šiestej úlohe bola uvedená analýza nákladov. Náklady boli v tejto práci chápané ako peňažné prostriedky, ktoré musia byť nevyhnutne vynaložené k tomu, aby firma mohla vyrábať a následne svoju produkciu úspešne realizovať na trhu. Štvrtá úloha mala manažérovi priblížiť problematiku nákladov a napomôcť pochopeniu možných alternatív ich priebehu. Náplňou piatej úlohy bolo poukázať na význam priemerných nákladov podniku. Tieto náklady boli úzko prepojené s rozsahom produkcie. Pri vyššej produkcii tu priemerné náklady klesali, oplatilo sa teda produkovať čo najvyššie množstvo, samozrejme pri rešpektovaní záujmu zo strany trhu.

Táto úloha ale skrývala v sebe jednu špecifickosť. Úlohou podniku bolo rozdeliť náklady na dve skupiny, a to náklady fixné a náklady variabilné. Vykonať takéto niečo v praxi je pomerne komplikované. Klasifikácia nákladov na fixné a variabilné si vyžaduje skutočne starostlivé zváženie každej jednej nákladovej položky. Náročnosť situácie si preto o to viac vyžaduje ovládanie znalostí z nákladovej teórie. V šiestej úlohe bola prepojená teória nákladov s teóriou produkcie. Náklady boli vyjadrené formou rozpočtového obmedzenia, ohraničenia. Prax podnikov hovorí, že žiadny z nich nemá neobmedzené zdroje, ktorými by mohol disponovať. Vypovedá o tom aj základná definícia ekonómie. Úloha mala teda manažérovi pomôcť rozhodnúť o tom, aké maximálne množstvo produkcie je firma schopná vyrobiť pri neprekročení stanoveného nákladového ohraničenia. S konfliktom medzi obmedzenými zdrojmi a maximálnou veľkosťou produkcie sa môžeme stretnúť v každom jednom podniku. Siedma úloha poukazovala na príjmy podniku a ich závislosť od spotrebiteľského správania. Je potrebné uviesť, že v ekonomickej teórii a teda aj v tejto práci, sú príjmy chápané ako peňažné prostriedky, ktoré podnik získa z predaja svojich výrobkov a služieb. Celkové príjmy podniku sú obmedzené. V záverečnej časti tejto úlohy bola uvedená situácia, kedy by sa mohlo zdať, že veľkosť príjmov môže neobmedzene rásť. Toto je špecifický prípad, kedy veľkosť príjmov závisí výlučne od realizovaného množstva a stretávame sa ním v tzv. modeli dokonalej konkurencie. V praxi sa však s takýmto niečím môžeme len zriedkavo stretnúť. Vo všeobecnosti je obmedzenie veľkosti príjmov je dané kúpyschopnosťou spotrebiteľa, ktorá je charakterizovaná jeho dopytom. Ďalším faktorom obmedzenia celkových príjmov môže byť aj produkčná schopnosť podniku, s čím sme sa mohli stretnúť v ôsmej úlohe. Úloha približovala podnik spomínaný v úlohe č. 2 a manažérovi ukázala spôsob, akým podnik môže maximalizovať zisk v krátkom období, kedy nemá časový priestor nato, aby zvyšoval svoje kapitálové vybavenie. Dochádza tu ku konfliktu medzi cieľom maximálnej vyťaženosti existujúcich zdrojov a cieľom maximalizácie zisku. Racionálny manažér by mal určite uprednostniť cieľ ziskový, nakoľko pri výrobe menšieho množstva produkcie bol podnik schopný dosiahnuť vyšší zisk. Deviata úloha takisto ukázala spôsob, ako možno zisk maximalizovať. Rozdiel bol iba v podmienkach, v akých sa podnik nachádzal. Išlo o nedokonale konkurenčné prostredie, t. j. za veľkosťou zisku v pozadí stáli spotrebiteľské preferencie a dopyt.

Na základe predchádzajúceho odseku môžeme vyhlásiť, že sa nám podarilo vytvoriť ekonomické úlohy, v ktorých sú matematické postupy a samotný diferenciálny počet aplikovateľné, a to nielen v teórii, ale aj v praxi. Uvedený bol podrobný návod na ich riešenie.

Ciele práce boli splnené. V práci sme predostreli podrobný návrh na riešenie týchto úloh a poukázali sme, že na základe takto zvolených postupov je možné sa v náročných praktických situáciách rozhodovať. Ako už bolo v úvode naznačené, ekonómia je s matematikou bezprostredne spätá, čo sa nám podarilo zdôrazniť aj v tejto práci. Ekonomická veda ako taká totižto stojí na matematických základoch, aj keď si to často krát možno ani neuvedomujeme.

Zoznam použitej literatúry

Knižné zdroje

1. ÁRENDÁŠ, Marko – LÖRINCOVÁ, Elena – ZENTKOVÁ, Iveta – ŠŤASTNÁ, Anna – GERGEĽ, Michal. 1999. *Základy ekonómie*. 2. vyd. Nitra: SPU, 1999. 395 s. ISBN 80-967111-3-X
2. ARNOLD, Roger. 2008. *Microeconomics*. 9. vyd. Mason, Ohio: South - Western Cengage Learning, 2008. 551 s. ISBN 0-324-78549-6
3. BIELIK, Peter. 2006. *Podnikové hospodárstvo*. Nitra: SPU, 2006. 319 s. ISBN 80-8069-698-5
4. FECENKO, Jozef – PINDA, Ľudovít. 1998. *Matematika 1*. Bratislava: Elita, 1998. 320 s. ISBN 80-85323-85-0
5. FECENKO, Jozef – SÁKALOVÁ, Katarína. 2004. *Matematika 2*. Bratislava: Iura Edition, 2004. 272 s. ISBN 80-89047-73-4
6. FENDEK, Michal. 1999. *Kvantitatívna mikroekonómia*. Bratislava: Iura Edition, 1999. 158 s. ISBN 80-88715-54-7
7. FENDEK, Michal – FENDEKOVÁ, Eleonóra. 2008. *Mikroekonomická analýza*. Bratislava: Iura Edition, 2008. 575 s. ISBN 978-80-8078-180-1
8. FENDEKOVÁ, Eleonóra a kolektív. 2009. *Zbierka príkladov z mikroekonómie*. Bratislava: Iura Edition, 2009. 199 s. ISBN 978-80-8078-242-9
9. FRANK, Robert – BERNANKE, Ben. 2003. *Ekonomie*. Praha: Grada Publishing, 2003. 803 s. ISBN 80-247-0471-4
10. GRAVELLE, Hugh – REES, Ray. 2004. *Microeconomics*. 3. vyd. Essex, England: Pearson Education Limited, 2004. 738 s. ISBN 0-582-40487-8
11. HONTYOVÁ, Kajetana – LISÝ, Ján – MAJDÚCHOVÁ, Helena. 2005. *Základy ekonómie a ekonomiky*. Bratislava : Ekonóm, 2005. 187 s. ISBN 80-225-1938-3
12. HOREHÁJOVÁ, Mária – MARASOVÁ, Jana. 2007. *Základy mikroekonómie*. Banská Bystrica: UMB OZ Ekonómia, 2007. 224 s. ISBN 978-80-8083-536-1
13. HOŘEJŠÍ, Bronislava – SOUKUPOVÁ, Jana – MACÁKOVÁ, Libuše – SOUKUP, Jindřich. 2008. *Mikroekonomie*. 4. vyd. Praha: Management Press, 2008. 574 s. ISBN 978-80-7261-150-8

14. JACQUES, Ian. 2006. *Mathematics for economics and business*. 5. vyd. Essex, England: Pearson Education Limited, 2006. 683 s. ISBN 0-273-70195-9
15. JONES, C. – CLAMP, P. 1999. *Matematika na dlani*. Bratislava: Príroda, 1999. 168 s. ISBN 80-07-01010-6
16. LISÝ, Ján a kolektív. 2002. *Ekonómia*. Bratislava: Iura Edition, 2002. 507 s. ISBN 80-89047-35-1
17. MAJDÚCHOVÁ, Helena – NEUMANNOVÁ, Anna. 2008. *Podnikové hospodárstvo pre manažérov*. Bratislava: Iura Edition, 2008. 244 s. ISBN 978-80-8078-200-9
18. MANKIW, Gregory. 2000. *Zásady ekonomie*. Praha: Grada Publishing, 2000. 763 s. ISBN 80-7169-891-1
19. MATEJDES, Milan. 2005. *Aplikovaná matematika*. Zvolen: Matcentrum, 2005. 556 s. ISBN 80-89077-01-3
20. ORSZÁGHOVÁ, Dana – PECHOČIAK, Tomáš – GREGÁŇOVÁ, Radomíra – MATUŠEK, Vladimír – KECSKÉS, Norbert. 2008. *Cvičenia z matematiky*. 3. vyd. Nitra: SPU, 2008. 204 s. ISBN 978-80-552-0012-5
21. ORSZÁGHOVÁ, Dana – TRENČIANSKA, Anna – PECHOČIAK, Tomáš – GREGÁŇOVÁ, Radomíra – STEHLÍKOVÁ, Beáta – ZENTKOVÁ, Iveta 2004. Aplikované úlohy z matematiky v ekonómii. Nitra: SPU, 2004. 131 s. ISBN 80-8069-333-1
22. ORSZÁGHOVÁ, Dana – FARKAŠOVÁ, Mária – GREGÁŇOVÁ, Radomíra – KECSKÉS, Norbert – PECHOČIAK, Tomáš. 2006. *Matematika a jej aplikácie v obchodných činnostiach*. Nitra: SPU, 2006. 143 s. ISBN 80-8069-757-4
23. ORSZÁGHOVÁ, Dana a kolektív. 2010. *Matematika a jej aplikácie*. Nitra: SPU, 2010. 375 s. ISBN 978-80-552-0479-6
24. PELLER, František a kolektív. 2002. *Matematika*. Bratislava: Ekonóm, 2002. 335 s. ISBN 80-225-1529-9
25. PERLOFF, Jeffrey. 2008. *Microeconomics: Theory & Applications with Calculus*. Boston: Pearson Education, 2008. 800 s. ISBN 0-321-46858-9
26. SAMUELSON, Paul – NORDHAUS, William. 2000. *Ekonómia*. Bratislava: Elita, 2000. 820 s. ISBN 80-8044-059-X

27. SEKERKA, Bohuslav. 2000. *Mikroekonomie*. Praha: Profess Consulting, 2002. 361 s. ISBN 80-7259-030-8
28. SYNEK, Miloslav a kolektív. 2007. *Manažerská ekonomika*. 4. vyd. Praha: Grada Publishing, 2007. 452 s. ISBN 978-80-247-1992-4
29. ŠLOSÁR, Rudolf – ŠLOSÁROVÁ, Anna – MAJTÁN, Štefan. 2002. *Výkladový slovník ekonomických pojmov*. 3. vyd. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 2002, 255 s. ISBN 80-08-03334-7
30. TAYLOR, John – WEERPANA, Akila. 2007. *Principles of microeconomics*. 6. vyd. Boston: South-Western College Pub, 2007. 880 s. ISBN 0-618-96765-6
31. TRENČIANSKA, Anna – RÚSKOVÁ, Kvetoslava – FARKAŠOVÁ, Mária – BARANÍKOVÁ, Helena. 2006. *Základy vyššej matematiky*. 2. vyd. Nitra: SPU, 2006. 142 s. ISBN 80-8069-765-5
32. ZENTKOVÁ, Iveta. 2001. *Základy mikroekonómie*. Nitra: SPU, 2001. 147 s. ISBN 80-7137-839-9
33. ZIMKA, Rudolf. 1998. *Matematika 1 s aplikáciami v ekonómii*. Zvolen: Matcentrum, 1998. 301 s. ISBN 80-968057-2-X
34. ZIMKA, Rudolf. 2004. *Matematika v ekonómii 1*. Banská Bystrica: Ekonomická fakulta UMB, 2004. 276 s. ISBN 80-8083-009-6

Internetové zdroje

35. SLOVNÍK POJMOV: *Hraničný príjem - marginal revenue MR* [online]. 2011 [cit. 14. 2. 2011]. Dostupné na internete: http://www.banky.sk/16968-sk/hranicny-prijem-marginal-revenue-mr.php
36. VELICHOVÁ, Daniela. 2011. *Matematika II*. [online]. 2011 [cit. 8. 3. 2011]. Dostupné na internete: http://evlm.stuba.sk/~velichova/Matematika2/Kniha/Kapitola2/Cast2_302.xml
37. VITEZ, Osmond. 2011. *The Use of Math in Economic Analysis* [online]. 2011 [cit. 14. 2. 2011]. Dostupné na internete: http://smallbusiness.chron.com/use-math-economic-analysis-3899.html